HONG KONG SCIENCE TEACHERS' JOURNAL

Journal of the

Hong Kong Association for Science and Mathematics Education
香港數理教育學會

The Association is a founder member of:

INTERNATIONAL COUNCIL OF ASSOCIATIONS FOR SCIENCE EDUCATION (ICASE)

FEDERATION INTERNATIONALE DES ASSOCIATIONS DE PROFESSEUJRS DE SCIENCES (FIAPS)

FEDERACION INTERNACIONAL DE ASOCIACIONES DE PROFESORES DE CIENCIAS (FIAPC)

HKASME Council 2016-2017

President	Professor Paul CHU
Hon. Auditor	Mr. Alex WU
Hon. Legal Advisor	Mr. Lester HUANG
Chairman	
Mr. LAU Kwok Leung, Gyver	Chinese YMCA College
Vice-chairman	
Mr. WONG Wing Kei, Stephen	HKASME
Mr. LI Chi Man, Jimmy	TYYI MFBM NM Chan Lui Chung Tak Memorial College
Hon. Secretary	
Dr. LAU Chi Ho, Humphrey	SKH Tang Shiu Kin Secondary School
Hon. Treasurer	
Mr. MOK Ming Wai, Michael	Wah Yan College, Kowloon
Hon. Internal Affairs Secretary	
Mr. Mui Chi Man	Chinese YMCA College
Hon. Editor	
Mr. LEE Wai Hon, Chris	Shun Lee Catholic Secondary School
Biology Convenor	
Mr. LI Chi Man, Jimmy	TYYI MFBM NM Chan Lui Chung Tak Memorial College
Chemistry Convenor	
Dr. LUI Bob	King's College
General Science Convenor	
Mr. WONG Wing Kei, Stephen	HKASME
Mathematics Convenor	
Ms. TSUI Kwan Yuk	HKSYCIA Wong Tai Shan Memorial College
Physics Convenor	
Dr. LAU Chi Ho, Humphrey	SKH Tang Shiu Kin Secondary School
General Studies Convenor	
Mr. NG Tak Keung, George	Lok Sin Tong Leung Kau Kui Primary School (Branch)
Council Members	
Ms. WONG Ka Wai, Winnie	CCC Heep Woh Primary School (Cheung Sha Wan)
Mr. NG Bing, Ben	HKASME
Mr. WONG Tak Ming, Jensen	Tin Shui Wai Government Secondary School
Immediate Past Chairman	
Mr. WONG Chi Kong, Alex	HKASME

Office Staff

Project Manager: Mr. WONG Kam Hon, Golden

Secretary: Ms. CHU Bik Ha

Accounting Officer: Ms. LO Yin Fong, Yvonne

香港數理教育學會理事會 2016-2017

會長	朱經武教授
義務核數師	鄔國權先生
義務法律顧問	黃嘉純律師
主席	
劉國良先生	青年會書院
副主席	
黃永基先生	香港數理教育學會
李志文先生	圓玄學院妙法寺內明陳呂重德紀念中學
義務秘書	
劉智豪博士	聖公會鄧肇堅中學
義務財政	
莫明偉先生	九龍華仁書院
義務內務秘書	
梅志文先生	青年會書院
義務編輯	
李偉瀚先生	順利天主教中學
生物組召集人	
李志文先生	圓玄學院妙法寺內明陳呂重德紀念中學
化學組召集人	
呂思奇博士	英皇書院
科學組召集人	
黃永基先生	香港數理教育學會
數學組召集人	
徐崑玉女士	香港四邑商工總會黃棣珊紀念中學
物理組召集人	
劉智豪博士	聖公會鄧肇堅中學
小學常識組召集人	
吳德強先生	樂善堂梁銶琚學校（分校）
理事會成員	
黃嘉蕙女士	中華基督教會協和小學（長沙灣）
吳賓先生	香港數理教育學會
黃德鳴先生	天水圍官立中學
上屆主席	
黃志剛先生	香港數理教育學會
會所職員	
項目經理：王金漢先生	
秘　　書：朱碧霞女士	
會　　計：盧燕芳女士	

Contributions to the Journal

Articles for the Hong Kong Science Teachers' Journal are welcomed from anyone interested in Science and Mathematics Education. Practising teachers are particularly encouraged to contribute. Articles may be submitted to the Editor at the address/ email address given below in either English or Chinese. The **next issue (Volume 33, September 2017)** will be published in September 2017.

In particular references should be made using the name-date convention. Abstracts of articles are not required, but it will be usual for articles to begin with an introductory paragraph.

Authors should make clear the name-style and institution which they wish to head the article. Long articles, or articles with many illustrations, must be **submitted on or before 30 June, 2017**, though short notes, book reviews may be considered later than this.

The views expressed in articles within this journal are authors' own and do not necessarily represent any official view either of the Association or any other public body.

Copyright of each article is co-owned by the author and the HKASME. The HKASME is willing, unless otherwise stated, to permit other similar educational, scientific associations to reproduce articles from this journal (for non-profit making purposes) without prior notification, by giving the usual acknowledgements. This does not apply to articles reproduced from other magazines.

會刊徵稿

《香港數理教育學會會刊》（下稱本刊）歡迎對數理教育有興趣的人士 — 特別鼓勵現職教師來稿。稿件可以中、英文字發表，來稿請寄本會的地址／電郵地址（後附），轉交本刊編輯。**下一期的會刊（第33期，2017年9月號）**將於2017年9月出版。

文章後的參考資料請按「人名 — 日期」的習慣附註。論文不一定有摘要，但文章的開始宜有一段簡介。

作者須清楚表示他希望在文章前所用的作者名字、職銜及院校名稱，長論文請於**2017年6月30日或之前遞交**稿件，以便進行編輯及審閱的工作。但較短的文章如書籍評介、教學筆記等，可以稍遲一點遞交。

本刊內的文章只代表作者的個人觀點，並不代表本會或其所屬團體的意見。

本會與文章的作者，共同擁有該文章的版權。本刊內的文章，除有特別聲明外，容許各教育、科學等團體複製作非牟利用途而毋須事前知會，惟須註明及鳴謝。但這條款並不適用於來自其他刊物的文章。

All correspondence should be addressed to
來稿請寄下列地址：
The Hon. Journal Editor, HKASME
Room 114, 1/F, Po On Court,
1-15 Po On Road, Sham Shui Po, Kowloon.
香港數理教育學會會址：
九龍深水埗保安道寶安閣一樓114室
網址Website: http://www.hkasme.org
電話 Tel: 2333 0096 / 2333 7602
傳真 Fax: 2333 3355
電郵 Email: enquiry@hkasme.org

Editorial

Chris, Wai-hon Lee
Journal Editor, HKASME

Following the idea adopted in recent issues, this issue of Hong Kong Science Teachers' Journal consists of two main parts: 'Articles' and 'Newsletter'. We hope that our Journal can be academic, as well as informative about the HKASME.

There are 11 academic articles, with 3 in English and 8 in Chinese, in the 'Articles' part.

The authors of ***the 1st article*** "***從小學課程看回融入數學史***" reviewed the introduction of learning Mathematic history into the curriculum. Learning the history of Mathematics itself allows students to have a more holistic view of the subject instead of being trained to deal with mathematics questions in a mechanical way. This article is particularly worth reading for mathematics teachers.

The author of ***the 2nd article*** "***人與環境的互動──認知、學習與偏執***" shared his view about the changes of a person behind a learning process. This article also talked about 'self-learning' in terms of the interaction between human kind and the environment. This article serves as a good reference material for all educators.

The author of ***the 3rd article*** "***淺談文憑試化學科的命題取向***" shared some typical examples questioning styles of DSE chemistry. This article also talked about the weaknesses and blind spots of candidates. This article serves as a good reference material for chemistry teachers.

Based on an action research, the authors of ***the 4th article*** "***Seeing the Invisible through the Lens of Heart: Creating Dialogic Space in Mathematics Classroom through Action Research***" allowed readers to know more about what had happened in students' minds when solving a mathematics problem. In the action research, the teacher specifically added a space in the mathematics worksheet for students to fill in their own logical thinking processes. This helps teachers understand more about student's thinking behind their answers.

Whether learning is successful or not may sometimes depend on psychological factors. The author of ***the 5th article*** "***Secondary School Students' Self-Efficacy for Scientific Inquiry***" shared his survey findings on how confident secondary 1 and secondary 2 students in Hong Kong performed every task involved in scientific inquiry. The results further drew his attention to another highlighting question "How can Hong Kong school teachers help students master the science process skills?" This article serves as a good reference material for all science teachers.

Earlier in this year, the music video of a song talking about 'congruent triangles' was very popular in the internet. The author of ***the 6th article*** "***學數的趣味：「說唱」數學***" made good use of this very popular music video as an example for mathematics teachers who always asked for

new teaching and learning ideas to help students learning mathematics. The success of such kind of creative mathematics teaching & learning materials encouraged mathematics teachers to rethink about what they should do and how they should make their class more enjoyable for students.

The author of ***the 7th article*** "*對八隅體的教學反思*" shared how he designed a lesson in order to deliver a more complete concept of 'stability' to his chemistry students. Chemistry teachers who like to design teaching activities are highly recommended to read this article.

The author of ***the 8th article*** "*小學生預備校際科學專題設計比賽──觀察與分析*" shared how senior primary pupils prepared for an interschool science project competition through their observation and interpretation. Their study aimed to focus on the impact of the interaction among all the project participants (both teachers and pupils) on the pupils' performance while the project was proceeding. Also, at the end, readers are being informed how the primary pupils were benefited from their participation in such science project competitions.

The author of ***the 9th article*** "***Let our Students Teach! Teaching as a Way of Mastering Knowledge***" believes that everyone learn something by reading about it, understand something by writing about it and truly master knowledge and skills by teaching. He wanted to prove this saying through the description of what his secondary students had done in a peer-to-peer learning science programme, in which the students had taught a range of science activities to primary school students.

The author of ***the 10th article*** "*在科學實驗探究中明示教授科學本質對學生理解科學本質的正面影響*" shared the teaching of 'nature of science' in experiments in order to promote the scientific literacy of students. Biology and science teachers who like to design teaching activities of 'nature of science' are highly recommended to read this article.

The authors of ***the 11th article*** "*光碟光譜儀──製作與教學*" shared how to make use of a CD to design a spectrometer. The working principles of the spectrometer were also discussed and some teaching activities were also suggested in this article. Physics and science teachers are highly recommended to read this article.

In the 'Newsletter' part, a lot of information of the HKASME can be found. Members can revisit the activities held in the last academic year from the "***Chairman's Report***" and "*科組簡報* ***(Subject Reports)***". Among the activities held, the AGM Forum discussing STEM eductaion is of course an important event. The article "*香港數理教育學會周年會員大會2016*" reminds us the highlights of various parts of the event. The ***cover of this issue*** is a photo captured during the AGM Forum of HKASME.

Members of Editorial Panel of Journal: **LEE Wai Hon, Chris**
NG Tak Keung, George
WONG Ka Wai, Winnie
WONG Wing Kei, Stephen

編者語

李偉瀚
香港數理教育學會會刊編輯

今期會刊延續近期的製作方向，分為「論文」和「會訊」兩個主要部分。這個做法務求能使會刊具學術性之餘，也讓各會員能夠掌握更多有關本會的資訊。

今期的「論文」部分共刊登11篇文章，其中3篇以英文撰寫，8篇以中文撰寫。

第1篇論文《從小學課程看回融入數學史》的作者討論從小學數學課程中引入學習數學史的可行性。學者提出學習數學史的本質有助學生對數學整體有較全面的看法和認識。其中在日常教學中學生可能不為意地訓練處理數學題目。如果他們不明所以地求答案，可能只會產生更多的疑惑。文章所提出適當的引入學習數學史值得小學數學科老師閱讀和思考。

第2篇論文《人與環境的互動——認知、學習與偏執》的作者分享學習是一個不斷認知、實踐及修訂認識的過程，過程中亦是新認知的現象與固有概念互動的內循環，而當中「自主學習」必須經歷物質變化導致抽象的認知，認知又反過來促使物質結構的改變。此文章對所有教育工作者來說甚有參考價值。

第3篇論文《淺談文憑試化學科的命題取向》的作者分享一些有關文憑試化學科常見的命題取向，並分析題目當中考核學生知識結構的盲點。此文章對化學科教師來說甚有參考價值。

第4篇論文《Seeing the Invisible through the Lens of Heart: Creating Dialogic Space in Mathematics Classroom through Action Research》的作者藉著一個行動研究來剖析學生在處理數學題目時他們的內心是怎樣思考和運作。研究中，老師特意於工作紙上加入一個特別的空間，讓學生填寫他們自己在計算時所思考的邏輯和考慮，從而老師可以對症下藥地回饋學生的課業。

學習成功與否，關鍵在於不同因素影響，心理因素是其中之一。***第5篇論文《Secondary School Students' Self-Efficacy for Scientific Inquiry》***的作者研究初中生是否肯定自己的能力，相信自己可勝任去進行科學探究，且亦從調查中所發現的學生問題作深入討論，帶出科學老師該如何應對，幫助初中生克服心理障礙，期望他們往後的科學學習旅程上，既能輕鬆地學習日新月異的科學知識，又能自信地掌握及應用各種科學探究技巧。此文章對所有科學科教師來說甚有參考價值。

較早前一首關於「全等三角形」的歌曲於互聯網上極速流傳，不但令學界關注，且亦引起各媒體廣泛報導。***第6篇論文《學數的趣味：「說唱」數學》***的作者捉緊這個熱門話題來引導大家作反思，傳統的數學課堂是否太枯燥乏味，數學老師可如何打破框框衝出局限，幫助學生去獲得更多不同的學習體驗，如何令數學學習更能緊貼和融入日常生活當中？文中作者試舉出不同例子讓數學老師齊來作一個深入的教學反思。

第7篇論文《對八隅體的教學反思》的作者分享他如何在化學課堂上幫助學生建構一個較全面有關「穩定性」的概念。喜愛設計教學活動的化學科教師可參考此論文，以提升教學成效。

第8篇論文《小學生預備校際科學專題設計比賽——觀察與分析》的作者分享小學生如何預備校際科學專題設計比賽及其觀察與分析，透過是次研究嘗試剖析參與者的互動對學生進行專題研習有何影響，以及小學生在參與有關科學探究的專題研習時會有何得著。

二千五百年前，在「禮記」的”學記篇”裡，記載過「學然後知不足，教然後知困，教學相長。」***第9篇論文《Let our Students Teach! Teaching as a Way of Mastering Knowledge》***的作者正對此道理深信不疑，亦透過分享其學生參與校內科學教學體驗及其所獲得的寶貴經驗和感受，切實地進一步驗證教學相長的道理，學生們也可透過先「學」後「教」的過程，來鞏固自己已所學的知識。

第10篇論文《在科學實驗探究中明示教授科學本質對學生理解科學本質的正面影響》的作者分享他在科學實驗探究中明示教授科學本質的教學經驗及其行動研究結果，藉此提升學生科學素養。喜愛設計科學本質教學活動的生物及科學科教師可參考此文章，以提升教學成效。

第11篇論文《光碟光譜儀——製作與教學》的作者介紹如何利用光碟製作光碟光譜儀，並解釋有關的原理及提供一些教學活動的參考。物理及科學科教師實在不容錯過。

「會訊」部分刊登了有關本會的多項資訊。在***《Chairman's Report》***和***《科組簡報(Subject Reports)》***中，各會員可以重溫上年度本會的會務及曾舉辦的一些活動和有關的花絮片段。在各項活動中，周年會員大會內有關討論 STEM 教育可算是本會的一項重點活動，***《香港數理教育學會周年會員大會2016》***可讓各會員重溫周年會員大會當日的盛況。今期會刊的***封面圖片***正是周年會員大會當日的大合照。

會刊編輯委員會成員：李偉瀚、吳德強、黃嘉蕙、黃永基

Contents
目錄

Articles 論文

1. 從小學課程看回融入數學史.....P.1
郭觀麟　東涌天主教學校
朱鳳貞　北角官立小學
李詩雅　英華小學
謝瑞華　英華小學
鄧佩玉　鳳溪廖潤琛紀念學校
黃毅英　退休數學教育工作者

2. 人與環境的互動——認知、學習與偏執.....P.18
庾劍財

3. 淺談文憑試化學科的命題取向.....P.32
潘永強　香港科學創意學會理事

4. Seeing the Invisible through the Lens of Heart: Creating Dialogic Space in Mathematics Classroom through Action Research.....P.34
Huk-yuen Law and Pui-sze Wong　The Chinese University of Hong Kong

5. Secondary School Students' Self-Efficacy for Scientific Inquiry.....P.53
Derek Cheung　The Chinese University of Hong Kong

6. 學數的趣味：「說唱」數學.....P.58
張僑平　香港中文大學教育學院課程與教學學系
朱肇濠　可風中學（嗇色園主辦）

7. 對八隅體的教學反思.....P.64
方子政　香港教育大學

8. 小學生預備校際科學專題設計比賽——觀察與分析.....P.72
周文禧、曾卓妍、黃文譽、朱啟豪、李天城、吳本韓　香港中文大學

9. Let our Students Teach! Teaching as a Way of Mastering Knowledge P.79
Gert C. Grobler　Carmel Divine Grace Foundation Secondary School

10. 在科學實驗探究中明示教授科學本質對學生理解科學本質的正面影響..... P.84
劉子健　聖公會基孝中學

11. 光碟光譜儀——製作與教學..... P.120
陳栢麟　新生命教育協會平安福音中學
張志國　天主教南華中學
吳悅、余栢禧、吳本韓　香港中文大學

Newsletter 會訊

1. Chairman's Report 2015-2016..... P.127
Gyver, Kwok-leung Lau　Chairman, HKASME

2. 香港數理教育學會週年會員大會2016..... P.129
李偉瀚　香港數理教育學會會刊編輯

3. 科組簡報2015-2016 (Subject Reports 2015-2016)..... P.131
徐崑玉、劉智豪、呂思奇、李志文、黃永基、吳德強
香港數理教育學會各科組召集人

4. Projects Summary of HKASME..... P.149
Golden, Kam-hon Wong　Project Manager, HKASME

從小學課程看回融入數學史

郭觀麟　東涌天主教學校[1]
朱鳳貞　北角官立小學
李詩雅　英華小學
謝瑞華　英華小學
鄧佩玉　鳳溪廖潤琛紀念學校
黃毅英　退休數學教育工作者

一直以來，不少學者提出在數學教學過程中引入數學史。近年中國內地更有不少大專院校開設數學史課程（李文林，2000；李迪，1993；駱祖英，1996），可見數學史在數學教育的地位漸漸受到重視，其引入理由和利益亦受到學者及大眾的認同。例如，Fauvel（1991）及蕭文強（1992）便提出以下幾點：引發學習動機、為數學平添「人情味」、瞭解數學發展過程、對數學整體有較全面的看法和認識、滲透多元化觀點、及提供進一步探索的機會和素材等。

古今中外不少學者亦提出類似觀點。美國著名數學史家卡約黎（F. Cajori, 1859 – 1930）認為由於個體學習知識與歷史上人類學習知識存在一致性，數學史對於數學教學來說是不可或缺的工具（Cajori, 1917）。荷蘭數學家和數學教育家弗賴登塔爾（H. Freudenthal, 1905 – 1990）指出即使學習的方法有別（Ernest, 1998），下一代學習數學的模式和過程大都踏著和前人一樣的路。近年的探討更推展到情感和數學觀的範疇（張慧珊，黃毅英，2013）。

不過對於前線老師，在日常教學中，未必意識到某個課題原來可以引進背後的數學史內容。有鑒於此，本文其中一位作者分別寫了〈把數學史引進數學教學真是那麼困難嗎？〉及〈從課程看回融入數學史〉兩文（黃毅英，2005，2007），當中皆集中在中學階段，現時擴展到小學階段作為前文的延續，希望能把討論趨向完整。

數學史往往令我們更容易掌握學生的困難。美國數學史家萊因（M. Kline, 1908 – 1992）指出歷史上數學家遇到的困難正是學生們碰到的壁，前人花這樣長的時間去定義和接受負數，我們的學生亦勢必如此。匈牙利著名數學家和數學教育家波利亞（G. Pólya, 1887 – 1985）指出：只有理解人類對事物或概念的認知過程，才能對下一代獲得該知識的過程有更好的判斷。所以跟著數學家的步伐，在歷史素材中汲取經驗，學習前人百折不撓的精神，才能幫助學生建立數學觀。

在香港，小學課程都較著重於基礎運算，學生的課業動輒要做大量數題。由於小朋友的模仿及記憶力強，故此往往能夠無偏差地將計算方法複製在考試卷內。只讓他們不明所以地

[1] 除首末作者外，其餘按筆劃序。

求答案只會產生更多的疑惑，為何除一個分數就是乘該分數的倒數？為何把菱形放平不能成為平行四邊形？如何定 1 米的長度等等。漠視這些問題不單扼殺學生的探究能力，長遠更埋沒他們對數學的興趣，只能視數學為計算答案的工具。作為老師應該講解箇中的內龍去脈，將以往數學史的知識、觀點和思維給學生分享。推廣至數的產生、數學各分支到其他學科的應用上，讓學生有更深入了解。

我們日常所用的教材只保留數學知識的基本精神，對其出處及由來一般甚少著墨。令我們常被問到一些不易解答的問題，例如：為何一小時有六十分鐘？為何十進制最被廣泛使用？為何同一數值要用不同方法（如百分數、小數、分數）表示？這些問題無不要在數學歷史裏找尋答案。我們應帶領學生探究一個抽象概念的產生，證明及思考過程，呈現僵化的公式的本來面貌，增加趣味性之餘更令學生有深入的掌握（蕭文強，1992）。

我們不必為了引入數學史而在每個課節中強加史料。反之應該鳥瞰整個課程，將有關的素材帶給學生。蕭文強（1992）提出可以在課堂上加插數學家的軼事和言行、教授數學概念時，先介紹它的歷史發展、以數學史上的名題及其解答去講授有關數學概念、以數學史上的著名錯誤或誤解去幫助學生克服學習困難、設計課堂習作、製作壁報、專題習作等等。

只要著眼點不凝聚於考試，我們大可不用定位數學史是主幹還是點綴，最重要是將其研究動機，過程及精神滲透到主線教學當中（駱祖英，1996）。讓數學典故幫助學生更透徹了解整個課程的脈絡，導向更深層的理解，從而提升教學效能、建立數學成就感。

小學數學引入數學史不但為了學生對數學發展有深入的認識，更重要是增加學生學習數學的趣味，讓他們欣賞前人的智慧與刻苦精神，正好滿足數學課程中數學知識層面以外的要求，例如，對數學的欣賞。

我們不想本文形成一種樣板化的「套餐」，老師教授課題時按圖索驥地生硬的引進數學史。最「皇道」之法仍是教師充實有關歷史資料的學養於教學時因應環境順手拈來。不過本文是想作出一種簡略的提示，原來某些課題可連繫到數學史。而不是說每個課題都要講，也不是說已羅列所有數學史元素。老師可按學生的年級、程度或興趣，來選取合適的歷史內容及深度。數學作為一個源遠流長的學科及人類文化，每個概念均具歷史意義及由來，並陪伴人類社會變遷及進步。由於覆蓋面十分廣泛，故此在教學上實在蘊藏無數的方法。本文只舉出課程中一部份例子及建議，給讀者一個參考及作為教學設計上的增潤。我們亦尋找了不少相關圖片及材料，由於版權問題，只列出出處，讀者可自行按圖索驥。

第一學習階段的學習重點

數與代數範疇

學習單位	歷史探索
1N1 10 以內的數	• 結繩記事（陳以禮譯，2013，頁 17）。 • 介紹數字「2」與「5」的出現。以往人們用身邊熟悉的東西來表示某一個數量的特徵，例如用眼和耳表示二，在藏語中二有翼的意思，因為鳥有兩隻翅膀；用獸足表示四，如果要表示的量與手的手指一樣多，則稱這個集合的元素為「手」；如果個數與整個人的手指與腳趾一樣多，則稱這個集合為「整個人」。 • 解開數字之謎及印度—阿拉伯數字的命名 http://ejournal.stpi.narl.org.tw/NSC_INDEX/Journal/EJ0001/9807/9807-09.pdf 介紹這套由印度人在公元一世紀左右發明的數字符號，在公元六至九世紀輾轉傳入阿拉伯及歐洲，經過不同的改良與修飾，才成為現在通行於世界各處的數字符號，因為這套數字符號最初經由阿拉伯人傳入歐洲，所以大家稱之為阿拉伯數字，但現在世界各地追認印度人首創的功勞，故改為印度‧阿拉伯數字了。 • 0 至 9 的起源 http://www.math.ied.edu.hk/ykman/history/Primary1/int_u1.htm#09 • 介紹數字是從哪裡來（陳敏皓譯，2013，頁 8-12）。 • 數字、數目及符號（劉于怡譯，2015，頁 11-27）。 認識各古文明的數字（一）至（四）（吳作樂、吳秉翰，2015，頁 4-9，48-51）。
1N2 20 以內的數	• 數字與進位（陳敏皓譯，2013，頁 12-24）。 • 進位制是一種記數方式 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%9B%E4%BD%8D%E5%88%B6
1N3 基本加減 （18 以內的加、減）	• 介紹「0」的來源：可提提不少民族中「0」的出現不但比較遲，亦是令人比較難接受的概念。 • 亦可提中國「0」和印度「0」（錢寶琮，1964，頁 142-143；洪萬生，2006）。 • 巴克沙里手稿：記載 0 具有數學意義的最古老物證（陳以禮譯，2013，頁 44）。 • 介紹「0」什麼時候出現（劉叔秋譯，2014，頁 67）。

1N4 100 以內的數	• 展示一些古代的數字。 • 羅馬數字與阿拉伯數字的對照 http://isvincent.pixnet.net/blog/post/30272251-excel-%E7%94%A2%E7%94%9F%E7%BE%85%E9%A6%AC%E6%95%B8%E5%AD%97 • 埃及數字與阿拉伯數字的對照 http://m.qyer.com/guide/cairo/5.html 零的認識：瑪雅的零及印度的 sunya（零的出現確立位值的系統，才能記錄大數量）。 • 商代中國人能用不多於 9 個算籌數字表示數量。 算籌的發明、規則、用法及對古代人類貢獻的資料 http://baike.baidu.com/view/52449.htm?fromTaglist • 大數與小數（億、兆、京…）（李約瑟，2000；李儼，1957；梁宗巨，1995）。 • 倫敦大英博物館內的浮雕，展示巴比倫楔形文字，1 至 59 的符號。 http://bluesky0301.blog.sohu.com/39480160.html • 伊山戈骨骸（陳以禮譯，2013，頁 18）。 • 介紹古代不同的數字： • 「阿拉伯數字」和「阿拉伯人數字」是截然不同的記數法 http://baike.baidu.com/view/22218.htm http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%B0%E5%BA%A6-%E9%98%BF%E6%8B%89%E4%BC%AF%E6%95%B0%E5%AD%97%E7%B3%BB%E7%BB%9F • 古埃及數學 http://gec.ncut.edu.tw/teacher/math/homepage/liu/mathsci/webfile/data/20081014063747.pdf • 羅馬數字 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BD%97%E9%A9%AC%E6%95%B0%E5%AD%97

1N5 加與減（一） （加法：不超過兩位數；減法：不超過兩位數，不退位）	• 介紹數學家：在公元 1489 年，德國數學家魏德曼（J. Widmann, 1462 – 1498）在他所著的數學書中第一次使用了「+」這個符號。 • 以下連結提供不同著名科學家的肖像及事跡，可參考魏德曼的生平 http://blog.sciencenet.cn/blog-542302-928741.html http://eta.nkfust.edu.tw/course/math/sign.html • 魏德曼亦同時是第一個使用「-」號的人。 • 英國數學家銳考爾德（R. Recorde, 1512–1558）「=」表示「相等」：「沒有比一對平行線更為相等的物體（No two things are more equal than a pair of parallels）」。 • 瑞士數學家哈納（J. Rahn, 1622 – 1676）發明了「÷」號，當時主要用以表達將一個整數分成數等分。 • 利用石子、樹枝使用「滿十進一」的原則計數（徐品方、張紅，2006）。
2N1 三位數	• 位值記數法及其好處（吳文俊，1975）。 • 數學家吳文俊的簡介 http://amuseum.cdstm.cn/AMuseum/math/3/3_22/3_22_1003.htm • 印加記數基普（梁宗巨，1995，頁 7）。 • 用蘆葦編成辮子的形狀，突出的小繩頭表示數目。
2N2 加與減（二） （加法：不超過三位數；減法：不超過兩位數）	• 中國除了用文字記數外，還有算籌記數法，屬於位值制記數法。算籌圖片及中國算術的發展。 http://mathdl.lib.tsinghua.edu.cn/htm/jianshi/jianshi.htm • 中國數字的圖像及發展 http://www.newasiabooks.com/subject/maths/page_menu/page.asp?PID=12

2N3 基本乘法（基本概念及計算）	• 介紹十八世紀美國數學家 William Oughtred 發明「✕」號，由「+」號演變出來。 • 九九乘法口訣的由來。 • 講一個戰國時期關於九九的故事【《戰國策》：有以九九求見齊桓公，桓公不納。其人曰：「九九小術，而君納之，況大於九九者？」於是桓公設庭燎之禮而見之。居無幾，隰朋自遠而至，齊遂以霸。】 。 • 利用算籌進行乘法運算。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%B9%E7%AE%97 給學生看一看出土古代算籌的圖片，參考以下網址 http://big5.ce.cn/gate/big5/cathay.ce.cn/history/200612/05/t20061205_9676970.shtml • 「算」這一個字就是「弄竹」的意思。許慎《說文解字》：「算，從竹、從弄。」。 • 尼普爾（Nippur，位於幼發拉底河下游）廟宇中發現的乘法表。 http://baike.baidu.com/subview/48544/5081568.htm • 介紹由文字表達乘法至後期所見的符號表示，亦可著學生自行設計符號及加以解釋（孫興運，1993，頁 38）。 • 乘法、除法直式的由來（吳作樂、吳秉翰，2015，頁 198-199）。
2N5 加與減（三）（減法：不超過三位數；加減混合計算）	• 介紹古代算術書：印度最早的算術著作《摩訶吠羅的算術書》；阿拉伯文最早的算術書《印度數學璀璨的章節》（陳以禮譯，2013，頁 49-51）。 • 介紹古埃及人及羅馬人怎樣計算（劉叔秋譯，2014，頁 63-67）。
2N6 基本除法（基本概念及計算）	• 介紹中國除法運算的歷史：最早期出現在南未楊輝的《算法通變本末》，後期宋朝「九歸歌訣」的產生，逐漸形成用九歸運算的歸除法。元代，算盤已普遍流行。歸除法的計算方法逐漸定型。明朝吳敬的《九章詳注比類算法大全》首先把籌算的歸除法使用在算盤上。 • 日式算盤的結構及用法 http://www.abacus.org.hk/display.htm • 乘法、除法直式的由來（吳作樂、吳秉翰，2015，頁 198-199）。
3N1 五位數	• 介紹數目字與數字的分別，讓學生聯繫英文字母和英文字的分別，令學生明白不同數字是不同的數目字的組合，並推廣至理解數字有無窮多個的概念（雷淑芬譯，2002，頁 34）。 • 介紹最古老的數字是什麼（劉叔秋譯，2014，頁 61）。

3N2 加與減（四） （不超過四位數）	• 介紹古代算術書：歐洲 15、16 世紀的算術文本《特雷維索算術》（陳以禮譯，2013，頁 59）。 • 介紹世界第一台收銀機：James Ritty 於 1879 年發明的收銀機（陳以禮譯，2013，頁 140）。 • 介紹其他的進位系統：二進制進位系統（劉叔秋譯，2014，頁 73-75）。
3N4 除法（一） （一位數除兩位數/三位數）	• 增潤：對於有興趣的同學可以教印度算法 http://hk.aboluowang.com/2013/0820/327469.html
3N5 四則運算（一） （加、減、乘和括號）	• Diophantine 丟番圖墓誌銘的內容及其生平對數學的貢獻。 http://www.ituring.com.cn/article/22877 教師可先將方程的主項轉換為丟番圖的年齡，從而以四則運算求取答案。 • 增潤：1 + 2 + …… + 100（按照 Bell(1937)是「81297 + 81495 + 81693 + …… + 100899」）。介紹數學家高斯的生平及童年趣事。對高斯的成長及出身可參考以下連結。 http://content.edu.tw/junior/math/tn_kh/store.htm • 介紹計算概念的由來（洪萬生等譯，2011，頁 30-35）。
3N6 分數（一） （基本概念和分數比較）	• 《算數書》、《周髀算經》、《九章算術》中的分數，《九章數學》與小學數學教學（傅海倫，1998）。 • 增潤：對於有興趣的同學可以談埃及分數。 • 可讓學生仿傚古埃及人將分數分成不同單位分數的連加。 http://www.tswcps.edu.hk/subjects/mathematics/Egyptian%20fraction.htm • 介紹不同地區古時表達分數的方法及後期演變（孫興運，1993，頁 11）。

度量、圖形與空間範疇

學習單位	歷史探索
1M1 長度和距離（一） （基本概念、直接比較、自訂單位）	• 山西度量衡博物館 http://baike.baidu.com/view/589536.htm • 老師可到以下網址介紹博物館內的一些圖片。 http://www.fotoe.com/sub/100580 • 北京故宮有很多度量衡展品 。 • 相傳 1011 年，英國皇帝亨利曾用他的臂長為單位，定為一碼，以成年人的足長為單位，定為一英尺。 • 俄國歷史上，曾用「步」作為長度單位。有「一步合五尺，千步為一里」的說法。
1M2 香港通用的貨幣（一） （硬幣）	• 香港硬幣種類及資料 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%A6%99%E6%B8%AF%E7%A1%AC%E5%B9%A3 • 以物易物。 • 中國古代貨幣（展示貝幣、布幣、刀幣的圖片） 。 • 展示圖片外，請學生比較古今貨幣的優缺。 • 參考及展示錢幣上的數學家。 • 印在 10 馬克上的數學家高斯，顯示德國人對其成就的認同 http://www.math.rochester.edu/people/faculty/doug/UGpages/gauss.html
1M3 長度和距離（二） （厘米）	• 由秦始皇統一度量衡（「書同文，車同轍」）的好處（過往要做很多兌換就慘了！）。 • 國際單位制及略說「米」的來源和定義（白烏敬，2007）。 • 米的定義 http://en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units
1M4 時間（一） （小時、年、月、日、星期）	• 給學生看一些古代報時器圖片以了解其發展。 • 銅壺滴漏、日晷、龍舟報時更香的原理及優缺，突顯古人的機智，以及他們對掌握時間的重視，帶出學生欣賞古人的情意，以及愛惜光陰，亦可參觀香港西貢天文公園。 • 中國日法純粹參考月亮嗎？陰曆？農曆：廿四節氣，其實太陽與月亮並用。（中國以農立國，曆法的製訂都離不開解決日常生活的問題，讓學生了解到數學與生活的聯繫及數學的實用性）。 • 關於方尖碑、日影鐘、北京古觀象台的圭錶的圖片及資料 http://www.guokr.com/blog/437571/ • 原子鐘及銅壺滴漏 zh.wikipedia.org http://big5.ce.cn/gate/big5/cathay.ce.cn/pieces/200806/03/t20080603_15716266.shtml

1S1 立體圖形（一） （柱體、錐體和球體）	• 學生認識立體後，可介紹一些特別的立體—多面體。希臘數學家畢達哥拉斯證明了正多面體只有五種：正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體和正二十面體（袁小明，2002，頁 66）。
1S3 平面圖形 （多邊形和圓形）	• 中國古代數學的平面圖形都是根據田地的形狀來命名（方田、圭田與箕田）。 • 中國古代的民間玩具，由「燕几圖」，燕几的意思是招呼客人賓宴用的案几，當七件案几拼在一起會變成一個大長方形，組合可變化無窮。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%83%E5%B7%A7%E6%9D%BF
2M1 長度和距離（三） （米）	• 小二常識科一般會提及秦始皇統一度量衡，現今度量衡被理解為量度單位，但常識老師較少提及度是計量長短，量是計量對某物質的容量，衡是計量輕重，數學教師可加以補充。 • 國際單位制及略說「米」的來源和定義（白烏敬，2007）及介紹國際單位及米的定義 http://en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units
2M2 時間（二） （時、分、上午、下午、日、年）	• 報時器的發展。 • 日晷。 • 參觀水浪窩、香港天文公園、仿明代郭守敬觀星臺、量天尺。 • 銅壺滴漏。 • 燒香（一般線香一柱香要燒大約一小時）。 • 沙漏。
2M3 香港通用的貨幣（二） （紙幣）	• 香港鈔票歷史。 • 最早在香港發行鈔票的銀行是東藩匯理銀行，他們 1845 年開始發行鈔票，這張 1866 年的紙幣就是由這間銀行發行的，當時的面額由五元至一百元都有，而以香港為基地的匯豐到 1872 年才發行鈔票，第一張鈔票面值一元，還以人手簽核。至於大家稱為大牛的五百元紙幣，70 年前已經有。這張銀紙由渣打前身，即印度新金山中國渣打銀行發行。不過紙幣面值不是愈來愈大，1941 年就曾發行一毫、五仙及一仙的紙幣，因為當時用來鑄造硬幣的銅價太貴，成本還較鈔票面值貴，所以印紙幣來減輕成本。報時器的發展。 • 在開始認識紙幣時，可讓學生認識紙幣的歷史。並可欣賞以下有線電視（2009）有關紙幣的歷史片段。 http://cablenews.i-cable.com/webapps/news_video/index.php?news_id=312895

2M4 重量 （克、公斤）	• 王字衡杆 http://baike.baidu.com/view/11609089.htm • 說一個關於曹沖秤象的故事（體積可分析加減）。
2S2 角（一） （角及直角）	• 海島測針斜 。
2S3 四個主要方向	• 展示指南針／車的圖片及簡單歷史 。 http://www.hjjh.kh.edu.tw/toyphysics/12/1.htm • 介紹生活中辨別方向的重要性及介紹由以往用指南針、地圖至現今衞星定位辨別方向的發展。
2S4 四邊形（一） （長方形、正方形、梯形、菱形等）	• 中國古代數學的平面圖形都是根據田地的形狀來命名（方田、圭田與箕田）。 • 四千多年前，埃及法老塞索斯特利將尼羅河岸邊土地仔細地劃分成大小一模一樣的正方形，分配給他的人民來耕種，當然人們每年都要繳交稅收給法老王（洪詩雅譯，2009）。 • 金字塔的塔基是一個很大的正方形，這麼大的正方形是怎樣畫的呢？在紙上畫一個小正方形是很容易的，只要用繪圖的三角板就行了。可是在地上畫一個邊長是二百三十多少米的正方形，哪裡有這麼大的三角板呢？況且在公元前三千多年前，還沒有繪圖用的三角板呢！那時候所用的工具主要是繩子。我們知道正方形四條邊的長度是相等的，正方形還必須四個角是直角。怎樣才能確定出一個直角呢？古埃及人在建造金字塔時，是用打結的繩子來進行測量的。所打的結子要把測量的繩子分成許多相等的小段，他們發現用這種繩子圍成的三角形，當三邊的段數分別是 3、4 和 5 時，最長的邊所對的角就是直角（孫興運，1998）。
3M1 長度和距離（四） （公里、毫米）	• 馬拉松（marathon）的由來。 • 以故事形式講及為紀念一位希臘戰士在西元前 490 年時，自希臘的馬拉松地方附近的戰場，攜帶著戰勝波斯國的消息奔向雅典傳達勝利戰報。這位戰士卻累死於此歷史性長跑的終點，因此馬拉松賽即是為這位令人印象深刻的結果而設立。
3M2 時間（三） （秒）	• 在學生認識秒後，可讓學生認識一些關於秒的歷史 。 • 最早可以顯示秒的時鐘出現在十六世紀的後半。最早用發條驅動，有秒針的鐘是一個沒有刻度。1579 年時，Jost Bürgi 作了一個鐘，上面有秒的刻度。1581 年時第谷·布拉赫在他的天文台中重新設計一個時鐘，可以顯示分及秒，但秒的計時不夠精確。擺鐘的出現使得人們首次可以精確的計時到秒。馬蘭·梅森在 1644 年計算長度 39.1 英吋（0.994 m）的單擺在標準重力下週期為 2 秒，單擺從最低點擺動，一秒後會回到原點，因此可以精準的計時到秒。

	• 「秒」這個時間單位的英文 second 在 16 世紀末出現在英文中，約比精確測量到秒的時間要晚一百年。用拉丁文寫作的人，包括羅吉爾·培根、第谷·布拉赫及約翰內斯·克卜勒等科學家仍使用拉丁文的 secunda，意思和 1200 年時的意思相同。「秒」的歷史：可參考以下網址 http://zh.wikipedia.org/zh-hk/%E7%A7%92#.E6.AD.B7.E5.8F.B2.E7.9A.84.E8.B5.B7.E6.BA.90
3M3 容量 （升、毫升）	• 新莽嘉量的圖片及描述。 http://catalog.digitalarchives.tw/item/00/0c/c0/8e.html • 說一個伊索寓言中的烏鴉喝水的故事─物體佔有體積 。 • 給學生看看斛、斗的圖片。 • 斛： http://www.twwiki.com/wiki/%E5%BB%BA%E6%AD%A6%E4%BA%8C%E5%8D%81%E4%B8%80%E5%B9%B4%E6%96%9B
3M4 時間（四） （24 小時報時制）	• 在學生認識 24 小時報時制後，可讓學生認識一些有關的歷史，教師可展示「時辰」及「時間」的對照表 。 • 考古發現，在商朝後期帝王的一塊甲骨上，刻有完整的六十甲子，可能是當時的日曆。這也說明在商朝時已經開始使用「干支」記日了。干支在古代稱干枝，好比樹幹和樹枝。干支曆作為中國傳統曆法，在中國古代一直使用，從未間斷。「干支」也可以用來記時，參考香港天文台網站： http://www.hko.gov.hk/gts/time/stemsandbranchesc.htm
3S1 平行和垂直	• 伏羲手執圓規（規）女媧手執角尺（矩）（孟子離婁章句上：無規矩不能成方圓）http://baike.baidu.com/view/3036480.htm
3S3 角（二） （銳角、鈍角）	• 提一提何以一周有360°？（梁宗巨，1995）（此為小五增潤課題）。 • 以一小時 60 分鐘作引入，問及學生如果以其他數表示一小時有何不方便。
3S4 三角形	• 何以稱三角形和四邊形？談到幾何來？展示徐光啟與利瑪竇的像 • 在歷史上中國對世界文化有過重大的貢獻。由於農業生產的需要，早在三千多年前，就已經有了三角形的概念，並總結出直角三角形三邊之間的關係。南宋時數學家秦九韶把三角形的三邊，分別叫做大斜、中斜、小斜，獨創了用三斜求三角形面積的方法，即著名的三斜求積法（孫興運，1998，頁 61）。

數據處理範疇

學習單位	歷史探索
2D1 象形圖（一） （一個圖形代表 1 個單位）	• 統計學的由來(陳敏皓譯，2013，頁 172-181) • 理解數據(洪萬生等譯，2008，頁 198-205) • 象形圖：http://en.wikipedia.org/wiki/Pictogram
3D1 方塊圖 （一格代表一個單位、平均值）	• 數理統計學：http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_statistics • 直方圖：http://en.wikipedia.org/wiki/Histogram • 塊圖：http://www.theschoolrun.com/what-is-a-block-graph • 塊圖：http://ictedusrv.cumbria.ac.uk/maths/pgdl/unit11/data.pdf • 塊圖：http://ictedusrv.cumbria.ac.uk/maths/pgdl/unit11/y123str6.pdf

第二學習階段的學習重點

數與代數範疇

學習單位	歷史探索
4N3 現代計算工具的認識	• 古代計算工具（算籌、算盤）。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AE%97%E7%AD%B9 • 介紹中式算盤、日式算盤（Soroban）、西藏式算盤、羅馬算盤、俄羅斯式算盤等。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AE%97%E7%9B%98 • 討論珠的數目會否影響運算的方法及效率。 • 柏斯卡（B. Pascal, 1623 – 1662）送給父親的禮物--加法機，被認為是世界上最早的計算器（田競，2012）。 • 萊布尼茲（G. W. Leibniz, 1646 – 1716）發明了可以加、減、乘、除的步進計算器（stepped reckoner），可惜成本太高，不受當代重視，據說現在那台計算機被當作紀念品，妥善收藏在漢右威（Hanover）市的蓋斯特涅爾博物館裏（文子譯，2012）。 • 步進計算品的圖片可參考 http://en.wikipedia.org/wiki/Stepped_Reckoner • 介紹世界第一台口袋工程計算機：HP（惠普公司）於 1972 年推出的工程計算機（陳以禮譯，2013，頁 228）。 • 介紹電子計算機（洪萬生等譯，2008，頁 206-213）。 • 介紹中國古代不同計算方法及工具 http://mathdl.lib.tsinghua.edu.cn/htm/jianshi/jianshi.htm • 中國古代算盤圖片可參考算法統宗 http://www.shuzan.jp/gakushu/history/04.html • 介紹印度吠陀數學速算方法（張琪惠譯，2011，頁 13-31，115-121）。

4N4 倍數和因數	• 利用英國數學家哈賽格庐鳥（C. B. Haselgrove, 1926 – 1964）的圖示，一眼看出因數和倍數的關係（李松譯，2012）。 • 給學生說一個有關倍數的有趣故事：把我的財產還來，以引起他們學習倍數的興趣（李松譯，2012，頁 45-48）。 • 學生學懂怎樣找因數後，便可簡單介紹完全數和親和數，然後讓學生找出 10 以內的完全數（只有 6）或找出 30 以內的完全數（6 和 28）。讓學生利用所學去發現一些奇妙的數字（文子譯，2012，頁 25-26》）。
4N6 四則計算（二） （四則混合計算）	• 整數四則運算史（徐品方，2013，頁 38-51）。 • 步進計算品的圖片 http://en.wikipedia.org/wiki/Stepped_Reckoner • 括號趣史（徐品方，2013，頁 51）。 • 數學符號來源和加、減、乘、除號及等號的趣史（徐品方，2013，頁 48-51）。
4N7 分數（二） （種類、擴分和約分，同分母分數加減計算）	• 《九章算術》 卷第一 方田（傅海倫，1998）。 • 分數史 （徐品方，2013，頁 64-68）。
4N8 小數（一） （基本概念）	• 古代小數的書寫方法 。 http://www.chiculture.net/0803/html/c41/0803c41.html • 1952 年瑞士數學家布爾基採用一個空心小圈在單位數字之下把整數部分和小數部分隔開，這與現代小數表示的方式最接近（袁小明，2003）。 • 有說發明小數的人是比利時數學家斯蒂文。但其實中國才是世上最早應用小數的國家。有關小數數學史（徐品方，2013，頁 70-71），小數點趣史（徐品方，2013，頁 50）。
5N1 多位數 （近似值）	• 四舍五入法的簡史及有關四舍五入法的趣聞（徐品方，2013，頁 71-73）。
5N2 有分數（三） （異分母分數加減計算）	• 《九章算術》卷第一・方田有涉及異分母分數加減計算（傅海倫，1998）。
5N3 分數（四） （乘法）	• 參考《九章算術》卷第一・方田有涉及分數乘法（傅海倫，1998）。

5N6 分數（五） （除法）	• 參考《九章算術》卷第一・方田有涉及分數除法（傅海倫，1998）。 • 分數史：顛倒相乘（徐品方，2013，頁 68-70）。
5A1 代數的初步認識 （代數符號）	• 代數一詞來源（中國、阿拉伯）的歷史。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BB%A3%E6%95%B0 • 中國：介紹清初年間數學家李善蘭（浙江海寧縣）對翻譯《幾何原本》的貢獻及將 Algebra 譯名為代數。 • 阿拉伯：介紹數學家花拉子模及其著作《花拉子模算術》。 • 方程式中常常用×來表示「不知道」的未知數，理由是甚麼呢？首次使用未知數×的人是法國數學家笛卡爾。在法語裏面，×是出現最多的文字，當時印刷廠裏有很多多餘的×活字。因此把多餘的活字×，塞進了未知數的位置上（李松，2006，頁 54》）。
5A2 簡易方程（一） （一步計算的方程）	• 《九章算術》第八章叫方程，因為當時以方塊的形式來陳述 • 代數發展簡史（徐品方，2013，頁 78-83）。
6N3 百分數（一） （基本概念、百分數和小數/分數互化）	• percent 一字是由拉丁文的 per centum 演變而成。per 是「每」、centum 則是「百」的意思。

量度、圖形與空間範疇

學習單位	歷史探索
4S3 對稱	• 阿拉伯幾何圖案。 • 欣賞於生活上的應用，例如建築、密鋪平面。 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%98%BF%E6%8B%89%E4%BC%AF%E5%BC%8F%E8%8A%B1%E7%B4%8B • 剪紙，窗花等對稱圖案 。 • 著學生尋找日常生活及自然界裡有對稱性質的事物。 • 文藝復興油畫及建築 。
4M2 面積（一） （平方厘米、平方米、正方形、長方形）	• 《九章算術》卷第一・方田有涉及正方形和長方形面積的計算（傅海倫，1998）。Escher（M. C. Escher, 1898 – 1972）名畫欣賞 。 • 令學生理解在二維空間表示三維物件的方法及限制，欣賞古代數學家及藝術家在這方面的努力。亦可利用 Escher 的圖畫突出平面圖表現出的矛盾。。

5S1 八個方向	• 中國所說的「方隅」，就是八個方向（四方與四隅）、佛經所說的「十方」就加了上、下。
5S2 立體圖形（三） （柱體、錐體和球體的特性）	• 略提祖沖之父子是世界上第一個計算出圓球體體積的人 （蕭文強，1993：微積分的故事，頁 20-44，不用微積分能計算體積嗎？，頁 74-90） 。
5M1 面積（二） （平行四邊形、三角形、梯形、多邊形）	• 《九章算術》卷第一・方田有涉及平行四邊形、三角形、梯形、等面積的計算（傅海倫，1998）。測量圖形面積的阿基米得。 • 讓學生認識早於阿基米得已發現了π，在其最著名的《論圓的測定》提出π的值在 $3\frac{10}{71} < x < 3\frac{1}{7}$ 之間……（王海娟，2007，頁 32）。
5M2 體積（一） （立方厘米、立方米、長方體、正方體）	• 《九章算術》 卷第五 商功。 • 阿基米得原理。 • 講述有關阿基米得如何確定皇帝受命於他確定於皇冠是否為純金（王海娟，2007，頁 37）。 • 天才的弱點 與 阿基米得原理但這以故事形式表達（洪詩雅，2009，頁 125）。
6S1 立體圖形（四） （頂、棱、面和截面）	• 得出圓錐曲線的奧波羅尼奧斯讓學生認識奧波羅尼奧斯提出的圓錐曲線是指在不同位置切開圓錐時，在橫切面上出現了的曲線有橢圓、拋物線、雙曲線等等……從而加深學生對截面形態的認識。（王海娟，2007，頁 46）。

中文參考文獻

文子譯（2012）（笹部貞市郎原著）。《學校這樣教數學就好了！上》。台北市：大是文化有限公司。

洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊譯（2008）。（比爾・柏林霍夫、佛南度・辜維亞原著）。《溫柔數學史：從古埃及到超級電腦》。台灣：博雅書屋有限公司。

白烏敬（2007）。《生活中有趣的單位與記號》。台北：世茂出版有限公司。

田競著（2012）。《極具挑戰的數學故事》。長春：吉林出版集團有限責任公司。

李文林（2000）。《數學史教程》。台北：高等教育出版社暨施普林格出版社。

吳作樂、吳秉翰（2015）。《圖解數學》。台北：五南圖書出版股份有限公司。

李迪（1993）。《中外數學史教程》。福州：福建教育出版社。

李松譯，金銀姬圖（2006）（大山堅天牛原著）。《超好玩的數學故事三十則》。汐止：可道書房。

李佳蓉譯（2012b）（笹部貞市郎原著）。《學校這樣教數學就好了！下》。台北市：大是文化有限公司。
李約瑟（2000）。《中國科學技術史》。北京：科學出版社。
李儼（1957）。《中國算學史》。上海：商服印書館。
林永偉、葉立軍（2004）。《數學史與數學教育》。浙江杭州：浙江大學出版社。
金和榮著，王海娟譯，（2007）。《教科書裡的數學家》。北京：京華出版社。
洪萬生（2006）。《此零非彼 O》。台北：台灣商務印書館。
洪詩雅譯（2009）（安娜・伽拉佐利原著）。《愛上幾何》。台北：如何出版社。
洪萬生、洪贊天、蘇意雯、英家銘譯（2011）（K. Devlin 原著）。《數學的語言》。台北：商周出版。
袁小明（2002）。《數學誕生的故事》。台北：九章出版社。
袁小明（2003）。《數學史》。台北：九章出版社。
徐品方、張紅（2006）。《數學符號史》。北京：科學出版社。
陳以禮譯（2013）（C. A. Pickover 原著）。《數學之書》。台北：時報文化企業股份有限公司。
陳敏皓譯（2013）（A. Rooney 原著）。《數學，為什麼是現在這樣子？》。台北：臉譜出版城邦文化事業股份有限公司。
郭書春譯（2009）。《九章算術》。上海：上海古籍出版社。
徐鳳先，曾雄生，傅海倫(1998)。《中國科技史》。台北：文津出版社。
孫興運（1998）。《數學符號史話》。濟南：山東教育出版社。
梁子傑（2005）。數學史：頭盤？主菜？甜品？。載黃毅英（編）。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》頁 30-35。香港：香港數學教育學會。
梁宗巨（1995）。《數學歷史典故》。台北：九章出版社。
張琪惠譯（2011）。《印度吠陀數學速算訓練法》。台北：世茂出版有限公司。
張慧珊、黃毅英（2013）。數學教學運用數學史之趨勢及前瞻。載黃家樂、李玉潔、潘維凱（編）。《香港數學教育會議——2013 論文集：培養數學思維》（頁 22-32）。香港：香港數學教育學會。
傅海倫（1998）。《九章數學》與小學數學教學。《數學教育》六期，24-30。
http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd2/content/Edumath/v6/v6pdf/v6_10to23.pdf
黃毅英（2004）。把數學史引進數學教學真是那麼困難嗎？《數學教育期刊》（Datum）41 期，7-15。後載《HPM 通訊》八卷 10 期 (10/2005)，1-9。
黃毅英（2007）。從課程看回融入數學史。《HPM 通訊》10 卷 2-3 期，3-7。
雷淑芬譯（2014）（D. Guedj 原著）。《數字王國——世界共通的語言》。台北：時報文化出版企業股份有限公司。
劉于怡譯（2015）（H. Hemme 原著）。《數字的秘密：數字、數目、度量衡與符號的由來》。台北：稻田出版有限公司。
劉叔秋譯（2014）（A. Beutelspacher 原著）。《小小數學博物館》。台北：天下雜誌股份有限公司。

劉煒（2002a）。度量衡的統一標準。《中華文明傳真 4，秦漢——開拓帝國之路》（頁 78-79）。香港：商務印書館（香港）有限公司。

劉煒（2002b）。統一貨幣與規範文字。《中華文明傳真 4，秦漢——開拓帝國之路》（頁 80-81）。香港：商務印書館（香港）有限公司。

蕭文強（1992）。數學史和數學教育：個人的經驗和看法。《數學傳播》第 16 卷第 3 期，頁 23-29。後載黃毅英（編）（2005），《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》（頁 30-35）。香港：香港數學教育學會。

蕭文強（1993）。《1，2，3…以外：數學奇趣錄》。香港：三聯書店香港有限公司。

駱祖英（1996）。《數學史教學導論》。杭州：浙江教育出版社。

錢寶琮（1964）。《中國數學史》。北京：科學出版社。

藍紀正，朱恩寬譯（1999）。《幾何原本》。台北：九章出版社。

English Reference

Bell, E. T. (1937). *Men of mathematics*. New York: Simon & Schuster.

Cajori, F. (1917). *A history of elementary mathematics*. New York: Macmillan.

Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School, 27*(4), 25.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 3-6.

Jones, P. S., & Coxford, A. F. (1970). From discovery to an awakened concern for pedagogy, 1492-1821. In P. S. Jones & A. F. Coxford (Eds.), *A history of mathematics education in the United States and Canada* (pp. 1 -23). Washington, DC: National Council of Teachers of mathematics.

Kline, M. (1970). *Logic versus pedagogy. American Mathematical Monthly, 77*(3), 264-282.

其他網上資源：

順德容山小學的博客。

http://eblog.cersp.com/userlog17/35905/archives/2009/1194769.shtml

Personal Website of Dr. Man Yiu Kwong, Department of Mathematics and Information Technology, The Hong Kong Institute of Education

http://www.math.ied.edu.hk/ykman/history/Primary1/arith_u1.htm

《台灣 HPM 通訊》（2004），七卷 4 期。

http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/vol7no4b.htm

https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=http%3A%2F%2Fres.hkedcity.net%2Fgeneral%2F0003%2F25%2F80%2F1346346229.ppt

http://www.chiculture.net/0803/html/c36/0803c36.html

http://www.math.ied.edu.hk/ykman/history/Primary5/nat_u5.htm

人與環境的互動——認知、學習與偏執

庾劍財

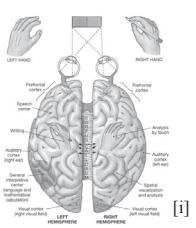
我在《有機的世界觀——唯物建構論》一文中提出一個一體的宇宙：無機物→（產生）有機物→有神經智慧的生物→有邏輯智慧的人類→群體（包括社會、國家），而社會活動反過來影響宇宙。承接上述模型，本文討論(i)**個別人的感性認知**和**理性認識**，人類智慧的成長是**內心**與**外在**世界，**精神**與**物質**不斷**互動**的結果。(ii)**學習是一個**不斷認知、實踐，然後**修訂認識的過程**，在這個過程之中有什麼因素會阻礙修正呢？(iii)然後，將社會看成是一個生命體，從個人認知擴展至**群體認知**。前者牽涉較多自然科學、認識論和心理學的問題，後者則牽涉較多倫理、道德及政治、經濟的問題。

個體認知

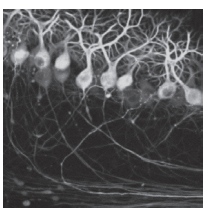
（一） 智慧的生理基礎

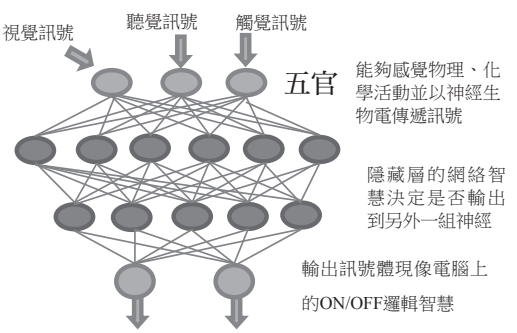
解剖顯示所有人的身體基本結構相同，我們可以用表皮細胞來區分人體的內外。人體內有大量神經細胞，透過突觸與樹突之間的連接，形成一個龐大的網絡。我們還不太清楚人腦如何工作，不過可以參照**類神經網絡系統**來聯想一下：

人類有五官，可以感覺外界的光線、聲音、震動、氣味和味道。Fergus Campbell[1]認為「傅立葉定理（Fourier's theorem）不僅是分析複雜視覺的優雅方式，在生物學上也很合理。」事實上，視覺訊號、聽覺訊號、觸覺訊號和生物電訊號都有共通的表達方式——正弦波（sine wave）的疊合函數。我不知道味覺訊號和嗅覺訊號可以用什麼形式來表達，還有人說人類有第六感，肯定的大前題是：能夠被人類的神經系統去感知和傳遞的訊號，必須要與神經訊號有着某些共通的表達模式。上層輸入的訊號經過多層網絡連結，每次的結果可以是：**忽略不理**，或者是**再傳送**到另一個網絡，這樣就可以產生相當



[i]


[ii]

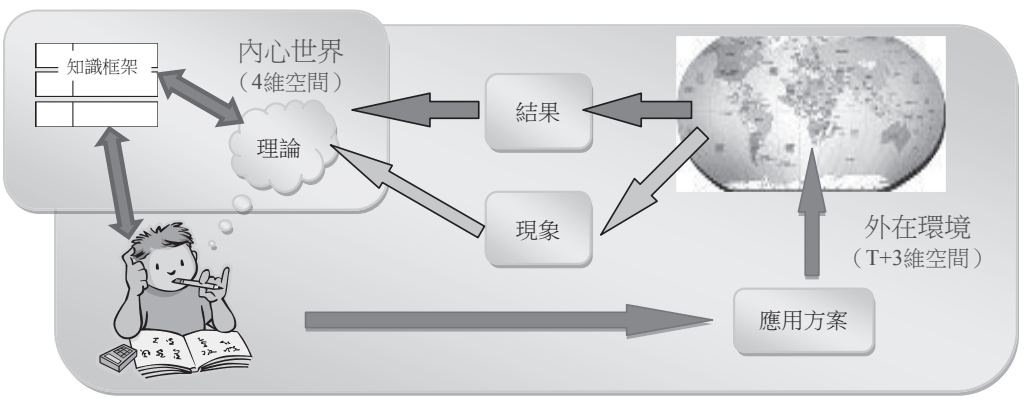


[1] 我的想法來自科學沙龍 Edge 的《世界是這樣運作的》（John Brockman 編，蕭崇論等譯，夏日出版社，2015 年 6 月第 1 版）一書中，Bruce Hood 的文章：《來自簡單的複雜狀態》

於現代電腦的各種功能閘門（ON/OFF、AND/OR gates），這是人類邏輯思維的生理基礎。神經細胞不斷感覺體內外的變化，由五官產生初級信號，再經由脊髓向上匯聚到大腦。關於應付日常生活所需要的反應，在較低的非意識層已經解決了；較複雜的感覺信號在大腦轉化成**意識**，產生感性的情緒和理性的理解[2]。人類透過接觸外界事物來達成學習，一個**自主學習**（self-learning）**系統必須**具備**改造自身組織**的條件：物質變化導致抽象的認知，認知又反過來促使物質結構的改變（在人體是神經突觸或樹突的增生，與及神經的萎縮和壞死）。

（二） 內外互動

人與環境的互動包含**內、外兩個循環**：人類**認知環境↔作出反應**的外循環；在思考過程之中，**新認知的現象↔與固有概念互動**的內循環。兩個循環互相糾纏，不能截然分開。



- 人類最原始的智慧來自父母——祖先進化而來的——遺傳，稱為**本能**。每一個人的遺傳基因都有些差異，構成個體的先天性差異，社會學由此產生先天決定論。
- 人類透過神經系統不斷地**感覺體**內生理活動與及外界發生的事情，影響到大腦意識層，稱為**認知**。大腦不可能巨細無遺地複製整個宇宙的資料，必須**簡化**客觀現象，再利用固有的知識，分析資料，產生**情緒**、**信念**等心理活動，作出**行為反應**。
- 另外，人類又要將過往的經歷整理成知識，稱為**理解**。為了迅速而有效地反應，人類對各種活動規律的認識必須要經過**簡化**、**美化**，建立**概念**和**理論模型**，然後**形式化**地表述出來。這些過程導致每個人對世界的認識都在某種程度上偏離現實，稱為**偏見**。

[2] 過去幾百年，西方科學一直意圖將人類的主觀感覺排除出智慧的範疇之外，**理性**知識就是不帶任何主觀意識的分析方法。佛洛依德之後才開始有一門獨立的心理學，但是與其他學科關係不大，直到近代腦神經科學發展，才令生理活動（生物體裡面的理化活動）與抽象思維結合起來。中國學術從來沒有出現西方的分割，成語「**忐忑不安**」的前半部份畫出人體生理結構：心臟分成四個空間（上房下室），血液由上面流向下面（穿房入室）。絕大部份病人都會將他們的心房、心室很快地卜卜跳動說成是「心慌慌」，醫生要理性地分析到底是應激情緒引起心臟反應，還是心血管毛病引起情緒反應。

- 人類重覆不斷地修改內心對世界的認識，稱為**學習**，學習會導至思考模式（類似軟件）及身體結構（類似硬件）改變，這個過程產生後天的差異；後天環境也可以激活或抑制某些遺傳基因的功能。用一部電腦來比照，先天結構是原廠設計的型號，但是生命體的自我改造形成**先天與後天的互動**，不能單方面採納**先天**或**後天決定論**。
- 人類一切思想活動都需要固有知識的參與，不過有時固有的軟知識或硬結構有時會反過來阻礙個體認知、理解和學習，稱為**固執**。

(I) 本體（我）與環境（非我）的劃分

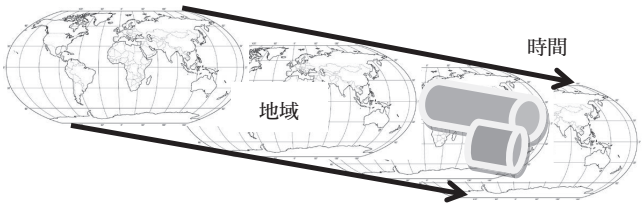
兒童心理學家皮亞傑[3]認為人類**認識**世界**由活動開始**，人類與環境互動主導認知，**知識是活動的結果**。父母放置一些玩具在嬰兒床邊，起初嬰孩並不認識這些**物件**，更加不知道什麼叫“**存在**”。對嬰兒來說，當玩具出現時它們就存在；父母拿開玩具，它們就不存在；但是對父母來說，玩具卻一直都存在於嬰兒床邊或儲物櫃裡。玩具吸引嬰孩本能地注意，當嬰孩踫觸玩具，玩具發出聲響。慢慢地，嬰孩的內心建立起一種因果律。嬰孩開始一再主動地踫觸玩具，並且期待聲響出現。活動與結果的聯繫不斷地重覆發生，強化了因果律的觀念，稱為**同化過程**，產生了**物件**的概念（玩具）和**活動**的**因果律**（踫觸——聲響）。逐漸地，嬰孩的神經系統建立了“**我**”與“**非我**”、“**物**”與“**因果律**”等網路模式，這時嬰孩可能還未有語言能力。有一天，當嬰兒踫觸一件“玩具”時，這個物件竟然不發出聲響，於是產生一個**異化過程**：此物不同彼物，因為踫觸的結果不同。遲些時，嬰兒可能又學會“紅色玩具”會發出聲響，“黃色玩具”不會發出聲響，於是又要將物件和因果律**分類**。中國哲學家馮友蘭說：中國哲學重視整體觀念，盡量避免將「我」與「非我」分開，「故**知識問題未成為中國哲學上之大問題**。」[4]因此中國沒有著力去發展分析科學。

(II) 利用不同的時空觀念去看待外環境與內環境

當我們觀察**外環境的變化**時，我們會直覺地採用牛頓的T+3維時空觀：時間隨着t_0、t_1、t_2 ...序列變動，一秒一秒地過去，人沒有能力控制“時間流”，昨天過去了，就不可以重複。但是在任何時間，人可以自由選擇向前、後、左、右、上、下6個方向活動，古人稱為「六合」，現代人看成是3對直線，稱為3維空間。

不過觀察**人類內在智慧的變化**時，採用愛恩斯坦的4維時空觀比T+3維時空觀更為合理：

[3]《發生認識論原理》，皮亞傑（Jean Piaget）著，王憲鈿譯，商務印書館，1981 年 9 月第 1 版
[4]《中國哲學史》(P.11)，馮友蘭，太平洋圖書公司，1968 年 5 月再版



“歷史”是一個4維柱狀“世界管”，人類認識世界必須利用過往的經驗和知識，因此總落後於當前環境一段時間，過去累積的智慧全都在大腦裡面對一個人產生影響，不像T+3維時空那樣過去了的就不再存在。譬如一個人少時在鄉間的圍村長大，現在在跨國公司工作，手上拿着最新型的i-phone。宗族、鄉土、跨國企業、資訊科技等概念對他都有影響，在他決定某一個行動之時，某一個元素的作用可能影響較大；做另外一件事情，影響力又會不同。在一個社會群體裡面，當社會上在某一時間T發生了一件事，不同的人可能運用T以前不同時空的思想和價值觀去理解當前發生的事情，得出不同的解釋。

先天遺傳基因及**後天神經網絡結構**的差異、固守後天**知識**所屬**歷史時空的那一部份**，形成人類對世界的認識千差萬異；再加上不同的**個體利益**去指導行為，故此人類紛爭不斷。

（三） 對外來資訊的認知

外界事物不停地**活動**，**呈現**無窮的**現象**，人類到底如何省察外界事物的呢？讓我們先分辨三個名詞：

- 世間萬象，**人**處於自然與及社會環境之中所**能夠察覺的**，統稱為**現象**。
- 現象客觀地存在，只有經過我們的五官轉化成某種資訊，或者透過機器代替我們轉化成某種材料，才能真正地為我們所察覺。**資訊是以特別形式表達出來的現象**。
- 資訊多得令人應接不下，我們不得不只選擇其中小量資訊來處理。方法是我們粗略地賦予資訊某種含義，稱為**相關性**，這種初部的分析令我們感覺到某些資訊攜帶着與我有關，對我有影響，或者是我有興趣的信息。**信息**是我**加了判斷的「關聯資訊」**。最後，我會運用不同形式的邏輯思考，產生不同層次的信息，指導行為。

(I) 獲得資訊

數碼相機是如何記住客觀環境的影像的呢？將平面切成很多條橫線和直線，相交出很多點，相機記住每一點的顏色，稱為一個像素 (pixel)。按下快門，一部百萬像素的相機能夠在一瞬之間記住一百萬個像素，構成一個稱為 bitmap 的圖像。下面兩圖都是同一個景像，

前者放大到模糊不清，不能辨識，不過相機會一視同仁地用一百萬個像素記住它們。有說人有7個短期記憶體，單位稱為chunk，是一個很模糊的概念，如果將chunk理解為pixel，可憐的人類在瞬間只可以處理7個像素，上圖提供的資訊太多，結果什麼也記不住。人接觸到外界現象，會轉化成**資訊**，將資訊**簡化**到一定程度，就能夠迅速地搜尋自己的知識庫，看到下圖，我們會迅速搜尋記憶資料庫，結果找到“南瓜”，於是只用一個chunk就輕易地記住了。

(II) 資訊的喚醒力

人與環境互動的過程中，不斷接收資訊，搜尋記憶，初步判斷資訊是否與自己有切身關係，有關聯的資訊會喚醒內在的記憶，引發思考，最後變成指導行為的信息。這樣，我們又可以將資訊分成沉悶和敏感的資訊兩種：

- 人的專注力需要內外互動才可以維持，**沉悶的資訊欠缺喚醒力**，內面一落閘，外界的現象就不會成為你的信息。譬如跟老公公、老婆婆閒談，他們總喜歡告訴你一些40年前的瑣事，與你沒有任何切身關係。在他們滔滔不絕的回憶之中，偶爾你會聽到幾個無關痛癢的詞語。開始的時候，你會間中點點頭，回應一句半句。但是不久，你開始覺得眼澀，鼻癢，腰骨疼痛，坐立不安。之後，你一句說話都聽不進去了，只祈求談話快些完結。對於學生來說，電子遊戲、流行歌曲之類屬於有喚醒力的信息，而在課堂上老師告訴他們的，則大多數都是沉悶的信息，因此很難集中精神。

- **敏感資訊**的特徵是它**有強勁的喚醒力**。近年香港有許多敏感的政治話題，人接觸敏感資訊之後，可以**產生強烈的認同或反對情緒**，激發人**選擇**並**表達鮮明的立場**。反應太迅速，有時反過來阻礙對資訊進行更細緻的處理。

(III) “喚醒”的偏差

“喚醒”過程需要固有的記憶、信念和偏好參與，會產生兩種類型的偏差：

1. **選擇性接收資訊**——在股票市場中，我們常常聽到有某些人被稱為「末日博士」，這種人生性悲觀，長年只留意市場的不利消息，股市有升有跌，不過他們略去升市的資訊，跌市的時候則認定自己正確。雖然他們對股市的整體印象歪曲了，但是如果他們只在跌市時參與沽空股票，卻仍然可以賺錢，強化自己的信念。現代人看資訊，迅速判斷，不喜歡的根本不看，表面上資訊雖多，產生出來的信息卻是貧乏而且歪曲的。

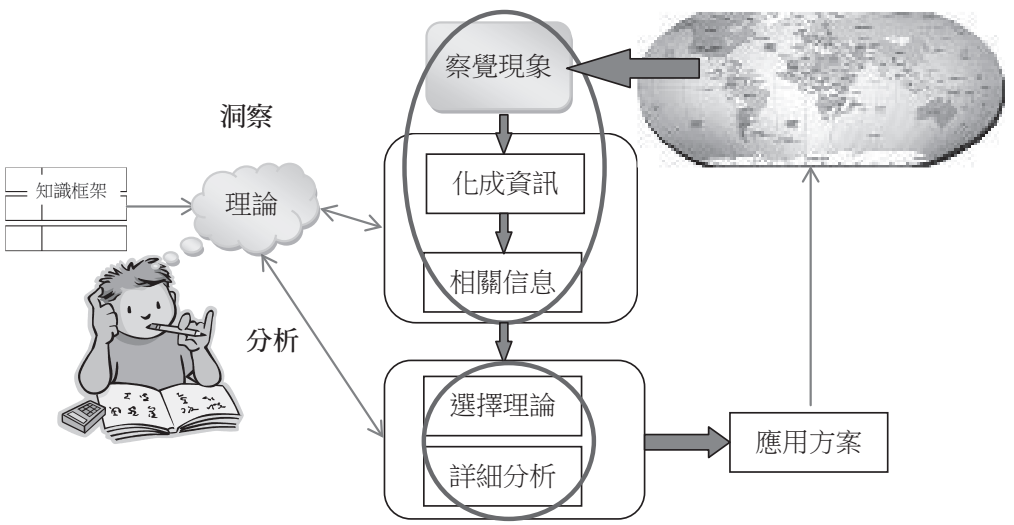
2. **附加信息**——譬如我們見到一個南瓜之後，當我們談到“剛才見到的南瓜”時，往往會將從前的記憶附加到目前的境況之中，而無法分辨出那部份是眼前接收到的資訊，那部份是附加上去的古老記憶。正如我們看見動物園籠中的獅子，它的軀體明明被鐵

枝截成許多段，我們的視覺卻會憑着本能將影像修補好。如果敏感資訊的喚醒作用太過強烈，很多人會被早已固定的立場所掩蓋，難以冷靜地思考。固執的人無法接收新來的資訊，好像那些偏激的“愛國”（或“民主”）人士，無論接收到什麼訊息，都會歸結為殖民主義者在香港十分活躍（或西環嚴重干涉香港行政）的“證據”。

(IV) 洞察

除了被動地受到外來資訊的刺激，人類也能夠主動地從萬千現象之中選擇出與自己息息相關的現象，這種主動獲取信息的能力稱為**洞察力**。智能科學家為了了解人類如何下棋，請來一群初學者、高手和大師，叫他們一面下棋，一面說出他們心裏正在思考的問題。結果發現所有人在相同的時間之內所能夠思考的問題，數目相差不遠。但是初學者選擇作為重點思考的問題，往往無足輕重，浪費時間；大師思考的問題卻著著都是要害所在，他們花相同的時間去思考，卻比初學者有效得多。結論有兩點：（1）人類的腦袋並非在單獨一個層面上運作，也不是以直線方式思考；（2）察覺關鍵問題所在，往往比多思索幾個問題更為重要。這樣，我們至少可以將人類對外界的認識過程分為兩層：**初步的洞察**和**深層次的邏輯分析**，前者著重寬度，後者著重深度。

洞察是一門高深的學問，是現代課堂之中學不到的知識，因為教科書只會陳述已經整理好的、結構鮮明的知識，而不會觸及建構知識的混沌過程。培養洞察力最好的方法是多讀不同科目的大師級人物的普及著作，然後在我們與環境的互動過程之中慢慢掌握。現代知識分科細緻，很多學科我們都沒有能力深入了解，不過大師們在著作的序言或第一章往往會將引起他們興趣和引導他們研究的現象寫出來。他們關注什麼？為何關注？這就是洞察力所在。洞察首重寬度，一個人要有好奇心，多學多想，才能夠建立知識的寬度。近代年輕人只對網上遊戲有興趣，視環境現象為沉悶資訊，這是一個危險現象。



（四） 資訊的內化————深化認識與學習

人一生下來就已經擁有某些知識和行為準則，**先驗**（無須學習）**的知識來自祖先**，一直都在指導我們的行為。人在與環境互動的過程之中，不斷接收外界資訊，引發內部的思維活動。外界現象很多，有些是我們已經認識的，有些卻不認識，我們要處理**知識**的**同化**與**異化**問題。人利用已經擁有的概念、理論和信念去決定如何行動，視乎行為的結果，我們又要處理**因果律的同化與異化**。學習就是不斷地累積對外界現象的認識，改善因果判斷的準確性。**內化知識**是一個無可避免的過程，最不願意學習的人其實是在不斷地自我同化，將因果判斷強化為一成不變的習慣。

(I) 信念的改變————貝氏定理（Bayes' theorem）

從前我學習貝氏定理時，講師問：假設一個花瓶有50%可能是真品，如果另一位專家說它有70%機會可能是真品，它到底有幾成機會是真品？我當時與講師爭辯，無論有多少人說花瓶是真品還是膺品，真偽的機率不可能發生變化，正所謂：真的假不了，假的真不了。講師只懂得依書直說，無法解答我的疑問。後來，我明白人類不可能預先知道真相，只可能建構信念（belief），越多人講同一件事情，大家就越傾向信以為真。現代的宣傳機制就是利用大話講多了就會變成“真理”（其實是強化信念）這個現象。

考慮以下的例子[iii]：一個學生自願參與驗毒計劃，檢驗的結果呈陽性，這個學生真的是一個吸毒者嗎？貝氏定理是一條關於隨機事件A和B的條件機率的數學定理，可以幫助我們理性地了解檢測前後應該作出的信念改變（但它不能改變事實真相）。

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

假設統計顯示香港有0.5%學生吸毒，故此一開始的時候，我們相信這個學生有0.005的概率是一個吸毒者（或0.995的概率不是一個吸毒者）。檢驗的結果呈陽性，又假設統計顯示檢驗的方法有99%準確度，故此測驗的結果有0.99的概率是真陽性（0.01的概率是假陽性）。根據貝氏定理，該學生在檢測呈陽性的條件底下，屬於一個吸毒者的機率為：

$$= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995}$$
$$= 0.3322.$$

即是說，開始的時候，我們想信：該學生有0.5%機會是一個吸毒者。因為檢測呈陽性，我們修改信念為：該學生有33%機會是一個吸毒者。

(II) 貝氏定理的提示

在現實生活之中，我們常常會運用類似的做法去處理新近獲得的資料，修改信念。一開始時，我們對某一事件的真確性作出一個概率判斷，然後收集資料作為修改原先判斷的證據。不過大多數人既不掌握概率觀念，又不曉得貝氏定理，經常都會犯以下幾類錯誤：

- 固執武斷——有些人一開始就下了一個極之偏頗的概率判斷，新來的資料無法大幅改變原先的概率比重，故此無論別人向他們提供什麼證據，結果總是傾向原本的判斷。
- 偏聽——人一生下來有一種先驗的傾向，處於極之愛好冒險到極之害怕冒險之間的某個位置。愛好冒險的人傾向接收鼓勵冒險的資訊，譬如股市上升能令你享受參與投資的刺激，你就會十分留意升市的資訊。反過來，害怕冒險的人傾向接收關於危機——譬如天災、跌市——的資訊，讓他們得以及時避險。偏聽的人總會忽略某些讓他們更新信念的機會，不願意接收任何與自己的固有觀念有衝突的資訊。
- 給新資訊過重的比重——譬如前面驗毒的例子，當我們發現學生檢測呈陽性時，會傾向認定學生很大機會是一個吸毒者，不過貝氏定理計算出來的結果卻不像一般人心目中那麼嚴重（33%）。雖然吸毒學生的基數只有 0.5%，我們卻只會留意到檢測有 99% 準確，打低一點，該學生總該有 80%機會是一個吸毒者吧。股票市場也是如此：經濟週期轉變很慢，不可能在短時間之內起太大的變化，不過很多人今天聽到一個好消息，就相信股市明天會大漲；今天聽到一個壞消息，就相信股市明天會大跌。

群體認知

人類對客觀世界不斷地認知，建構解釋，再按自己的理解創造工具，組織社會，提升存活率。我們可以用三個角度去看社會：（1）**社會是一個環境**，個別人生活在**自然**與**社會環境**之中；（2）**社會是個人延伸出來的生命體**，隨着個人的轉變而演化；（3）對每一個人來說，**社會**可以被外化為**除了自己之外所屬社群的整體**。

（五） 個人與群體認知的關係

個人與社會產生比較複雜的互動關係，譬如香港的個別人活在一國兩制這個社會環境之下，面對“國家”、“香港”、“國內”三個大群體，與及許多其他小群體，其中有些群體屬於自願參與，有些則是強制參與的。社會環境由人打造，個人的信念對建立社會制度很重要，但是社會之中各人的意見經常相左，因為沒有可靠的方法預測跟隨不同想法的後果，故此產生**個人與群體認知**一系列**的對立與統**一關係。

(I) 對知識同化的兩種態度

人與社會互動時，將社會看成是“環境”，還是“個體”，會影響他們的生活態度：**認為社會是不以自己意志而改變的環境的人會盡力適應**，直到生命受到威脅才反抗；**認為社會只不過是另外一個個體的人**，會強調自己固有的信念，**盡力讓他人實現自己的信念**。

自然科學家相信：「所有哺乳類動物都是胎生的。」現代自然科學家大多數都是客觀真理論者，相信客觀事實是他們的核心價值觀。當他們發現鴨嘴獸是卵胎生的時候，他們就要改變自己的理論去解釋新發現所引起的不協調。面對鴨嘴獸這個異像，自然科學家解釋說從前的生物並不是這樣的，因為進化的關係，今天的哺乳類動物才都是胎生的，鴨嘴獸正好填補了進化過程所丟失了的聯繫(the missing link)，於是大家又得著內心的和諧，接受了新理論。現代科學之所以進步神速是因為它尊重事實，願意重構已有的理論架構來符合客觀觀察。愛因斯坦原本相信牛頓力學，但是當他做實驗時，他的固有信念不斷受到衝擊，因為他抗拒統計力學，於是說了一句固執的名言：「上帝不擲骰子」，不過他最終還是接受了事實。人與自然環境互動時，較多數人選擇尊重環境，而不是強調自己固有的信念，**將「環境」觀念應用到社會的人，也會相對重視社會上大多數人的共識**。

社會工作者有一個信念：「父母愛子女之心，無微不至。」當他們發現一對不愛護子女的父母時，產生了異化的感覺，於是他們意圖改變那對父母，令他們愛惜子女。如果他們成功了，就會**強化原來的信念**；失敗了，就會產生厭惡、無奈或挫敗的感覺。**將社會看成是自己面對的另一個「個體」的人，傾向不斷自我強化。**

最近，香港大學為了聘請副校長出現了一些混亂，醫學教授袁國勇選擇退出委員會，原因是他所受的的教育無法讓他好好地處理這些紛爭，另一位醫學教授李國章卻沒有這個問題。我們可以怎樣解釋兩位教授的差異呢？設想李教授選擇了一個社會工作者的立場，他相信每個人都應該愛國，當他見到有人不愛國的時候，心裡想的只是如何令不愛國的人變得愛國，意圖改變那些人。但是袁教授卻選擇了自然科學家的偏好，愛國問題在自然環境裡並不存在真偽的之別，無法考證，何必糾纏在他人的主觀觀念之爭呢？一個喜歡**追求強化自我信念**，另外一個喜歡**解釋客觀現象**，這樣事情就比較容易理解了。

(II) 社會體制對資訊內化的影響

人類是群居的動物，天性喜歡獲得群體認同，或加入自己認同的群體。在氏族社會和封建社會的年代，相同宗族的人大多數居住在附近，喜歡以近似的身體表徵、風俗習慣和宗教信仰作為認同的標準。到了跨國企業年代，上述的認同標準雖然仍然存在，但是跨國企業亦要求其僱員接納，甚至了解，其他身體表徵、風俗習慣和宗教信仰的同工或顧客，為跨國企業培養國際精英的學術機構早在年輕人十多廿歲時就讓他們習慣這種多元環境。由於資訊科技的發展，人類溝通不再受到地理位置限制，傳統特徵不顯現於網上接觸，年輕網民逐漸以全球化通俗文化及言論導致的抽象感覺（“有feel”）為伙同的要素。

(III) 香港的群體極化現象

回顧過去20年，香港逐步形成今天的群體極化局面：

廿年前，香港完成了從農業、輕工業、地區性商業社會轉變為國際金融、服務業社會，成為全中國對外最開放的地區，比大陸率先進入跨國企業階段。當前，香港下一步正要進入創意產業的年代。《新創企業之國》[5]一書描述了新創企業為何能夠在以色列湧現：創意者必須帶點反傳統性格，而這一類人會否湧現，視乎社會對他們是否寬容？有沒有提供指導及援助？這時香港回歸中國。

現時的城鎮化國策反映中國還處於農業社會進入工業社會階段。在社會結構方面，中國屬於權威社會，權力中心是黨中央，然後一層層傳遞下來，權力階層牢固，反叛性格不受歡迎。在很多方面，中國還處於抄襲階段，近年才脫離“照版煮碗”式的抄襲。以色列技術在中國很吃得開，證明中央政府對於擁有先進技術的成熟外來者十分開放。但是以色列學生能否在中國的社會環境之中摸索成長為一個創意人呢？恐怕不易。目前中國只是在長期閉守之後的開放時期，由於沒有發達國家那麼多法規限制，中國人的創業活動很活潑，但只限於引入先進國技術，再加上各式各樣的改良和變化。中國的成功主要還在於擁有一個龐大的市場，與及中國人克苦耐勞。中國欠缺一個寬容活潑的學習環境，可能要許久才會步入前衛階段，思考出前人未想過的概念，再利用來做前人未做過的事情。

回歸之前，香港是一個開放型的國際化大都市，社會環境比較寬鬆、多元化。不幸的是中央政府的生命史之中，大部份時間都只是處於**戰鬥求存**和**脫貧**兩個階段，對於富裕社會應該如何發展沒有經驗。為了保障自己，中央在香港扶助了一大批工、農業社會意識極強的人，雖然他們口頭上不提反全球化，但是他們的思想卻極端本土主義，連香港市花洋紫荊的「洋」字也容不下，強行將兩種不同種屬的植物共用一個名字：紫荊。香港出現兩大群組，他們將所有問題簡化成政治體制上的“民主”與“愛國”之爭。其實兩個詞語根本無法涵蓋香港面對的眾多問題，但是兩把聲音淹沒了其他討論，許多小群組在默默無聞之中形成。反東西網路大連橫的“愛國本土主義者”在不知不覺之中摧生了反南北網路大合縱的“香港本土主義者”，香港逐漸走向閉關自守。

《群體極化》[6]：「群體互動傾向於擴大人們最初的傾向。」「孤立在緩和影響之外，群體互動成為一種社會擴大器。不管是愛好和平的人或者是新納粹分子、技術宅男或是哥德次文化、密謀者還是癌症幸存者，網路都增加了他們發現同伴並影響彼此的機會。當社群網路化之後，同類圈子裡的利益、態度和猜疑都被放大了。」電郵、群組媒介（例如facebook）及智能手機相繼出現，表面上大大加速了人與人之間的溝通。事實上個別人卻越來越困處於小群組之中，他們閱讀的資訊越來越簡短，幾十個文字已經太多，幾十組數字

[5]《新創企業之國——以色列經濟奇蹟的啟示》，Dan Senor & Saul Singer 著，徐立研譯，木馬文化事業股份有限公司，2010 年 6 月版

[6] 科學沙龍 Edge 的《世界是這樣運作的》（John Brockman 編，蕭崇論等譯，夏日出版社，2015 年 6 月第 1 版）一書中，David G. Myers 的文章：《群體極化》

更沒有人會看（可能賭馬、炒股除外），最好是一幀圖片，從中得出一切直觀感受。各個群體閉鎖在小圈子之內，輾轉傳遞相同的信息，互相強化既定的思想。新資訊媒介以雷霆萬鈞之勢，傳播着不經慎思，沒有證據的信息，為了增加收視率，更要以偏概全地增強信息的震撼性。這些信息擴大對立、猜疑，令人一聽到其他聲音，就群起而攻之。慢慢地，這些人變成視而不見，聽若妄聞，香港出現了越來越嚴重的「黨同伐異」現象。

恐怖主義是群體極化的極端版。穆斯林困處沙漠地區，或者以小數群體客居異鄉，長期受到擠壓，故此當群組媒介及智能手機忽然來臨，群組將個人心中的鬱悶引爆，這就是ISIS那股莫名其妙的力量根源，忽然冒起，沒有什麼成長過程，沒有名星級的領袖，影響卻無遠弗屆。目前香港還是一個比較溫和、開放的地方，希望特區政府不會為了改善香港的亂象而執行更加閉鎖的公共資訊政策，進一步推動群組極化，使社會變得更加暴力[7]。

（六） 多元文化及動態的反思平衡

人類為了**共同利益**而組成社會，如果個別人覺得**社會**對自己**公平**，會表現融入社會，否則就會產生反社會意識。個體利益及社會公義兩種價值觀同時存在於每一個人身上，有時一致，有時矛盾。人類組成各種各樣的群體，不同認識及不同利益的群體互相對抗，最後訴諸武力，造成破壞。如果群體之內的每個人能夠不斷反思，有時雖然解決不了矛盾，但是這種矛盾將會是推動社會層面的認知，構成改革社會的動力。為了減少不健康的極化思想，我們不況思考一下社會的正義原則及反思平衡的觀念。

- **功利主義公義觀**強調每一個人都會理性地追求個人最大的長遠利益，因而合理地放棄一些短期個體利益。在處理全球暖化的時候，我們看到大多數國家都同意減排，不過具體行動卻遲遲無法實施，是功利主義失效的一個例子。
- 與功利主義相反的性善論認為人類擁有**與生俱來的公平原則和正義感**：
  - **直覺主義公義觀**強調人類本性的公平原則是**至善**的，不可以再分析，也**無須修改**，只要按本性而行就可以。不過，並非每一個人具體行事時都那麼明白事理，很多人純粹跟據先人定下來的規矩生活，不問原由，直覺地接納為社會公平原則，一切理所當然，不容懷疑，阻礙社會進步。
  - 一支竹會易折彎，幾支竹一扎斷折難，**社會契約論的公義觀**假設人類生而認同社會合作，願意遵守公平的原則，不用事事預先問自己的利益所在。美國哲學家羅爾斯[8]認為人類可以在脫離現實環境，在不觸及個體利益的**無知之幕**裡面，透過**反思平衡**（reflective equilibrium）來達致共同接納的公平、正義的終極原則。反思平衡就是同

[7] 不幸地，香港在大年初一出現了一場騷亂，正是我擔心的發展方向。
[8] 《正義論》（A Theory of Justice），羅爾斯（John Rawls）1971 年著，何包鋼等譯，京華出版社，2000 年 10 月第一版。

> 意直觀**原則**之餘，仍**接納**群體之間**有妥協空間和**具體實施時**修改的可能性**，權衡利益之後，有時人類為了避免更大的不義而容忍較小的不義。

如果我們將上述觀點結合進化論來看，人類為了**共同利益**而組成社會，社會也是一個擁有進化過程的生命體，這樣我們就應該用動態的眼光來看社會。因為不同的人有着先天與後天的差異，適應環境變化的能力不同，社會總是要自然地產生不平等的現象。同時，人類意識到社會過度不公會產生動盪，時刻**追求社會公平對代個別成員**，這是社會的自我完善機制。很多絕對平均主義份子混淆了過程與現象的分別，不准別人承認男女有別，學生智力有別，其實正是由於承認有差別，才需要保障弱勢社群免受過度的欺凌。個體利益及社會公義兩種價值觀同時存在於每一個人身上，有時一致，有時矛盾，需要不停地調校。

客觀上，社會的**公平原則是**生活在**某個地域**之內的**某個群體，在一段長時間**之中，**由主觀願望及客觀環境磨合形成的觀念**。現代社會由於科技發展與及全球化的關係，社會轉型、群體踫撞，出現種種矛盾（文化、宗教、經濟衝突及代溝等等），變化迅速。公平細則需要追隨生產關係及社會結構而變化，但是人類內化客觀現象的能力並不太高，無法快速適應，對世界的認識經常落後一段相當長的時間。當社會上出現不同意見時，如果能夠指出各個群體的主要時空領域思想特徵，然後針對各種紛爭，尋找更廣闊的時空領域、更高層次的原則，平衡各方素求，就能夠推動群體認知。下面列舉兩個例子討論一下。

(I) 探討婚姻道德上的問題

在封建時代，男人們在外面性命相拼，爭奪財富。如果他們的妻子不忠，懷上另一個男人的孩子，而孩子將來繼承了財富，這等於劫掠了整個家族。因此，從家族**功利主義**公義觀的角度看，男人不忠是獲得更多財富的美德，女人不忠則等同盜竊罪。久而久之，**直覺主義**者不問為什麼，反正女人偷漢子就是該死。

工業革命之後，封建制度崩潰，加上越來越多婦女在經濟上獨立，婦女的貞節觀念開始受到衝擊。人類發明避孕工具之後，強調個人利益的**自由主義**者更否定了性愛的傳宗接代功能，將性愛看成是個人的消閒活動。因為人類其他一切消閒活動都不是單伙伴制的，這樣一來，對婚姻的忠誠反而被看成是培養另一伴侶妒忌心的錯誤行為。

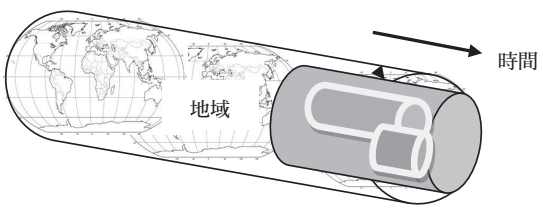
無論如何，我們不能否認大多數的婚姻是男女雙方為了生兒育女而合組家庭，共同照顧下一代。這樣，婚姻可以被看成是男女雙方之間的**契約制度**，而公平的契約精神是立約各方都應該自願遵守的，所以男女雙方都應該顯示對家庭的忠誠。具體來說，人類歷史是由封建制度演化過來的，封建制度對婦女較多壓迫，故此現代婚姻法又較為偏向保護婦女，我們為了解決古老時代遺留下來的不公而接受現在的不公。

人類是雙性繁殖的生物，因此我們直覺地接受異性戀，否定同性戀。從前大家認為同性戀是一種罪行，後來醫學界告訴大家同性戀是病而不是罪，於是很多地方將同性戀“非刑事化”了。現在，同性戀者又爭取“同性婚姻合法化”。同性婚姻既不是為了繁殖後代，又

沒有異性不公的問題，那麼他（或她）們居住在一起就可以了，到底同性戀者為什麼要結婚呢？當我們決定站在那一方之前，最好反思一下同性戀者要求的是婚姻保障？還是渴望社會**接納同性戀是人類**這個動物品種的一種**正常屬性**（既不是罪，也不是病）？故此可以做任何被視為正常人的活動？如果他們追求的不是婚姻保障，又何必搞亂原本為了保障異性婚姻而設立的契約呢？說到這裡，我發覺自己從未認真思考過婚姻法，一切皆習之所然，該當如此。時至今天，我們有沒有需要分開為了｛父—母—子女｝**兩代家庭**而設的婚姻法，及**同代二人**而設的同居法呢？

(II) 思考香港政制改革出現的矛盾

政制改革引致香港出現了嚴重的家庭撕裂狀況，主要是“愛國”父母與“民主”子女的矛盾。一個個原本和睦的家庭，現在子女變得憤慨激昂，父母則怨懟“民主派”教壞自己的子女，其實他們的子女集合起來就是他們指責的對象。當雙方各說各話，不能溝通的時候，不妨選擇一個可以令雙方先放下我忠你奸立場的起點。環顧一個理想中公平社會的各個要素，能夠概括**愛國**和**民主**二者，作為討論起點的觀念是：**免受欺凌**。



愛國者的生命史在宇宙時空之中是一個長筒，觀念來自晚清以至廿世紀中葉，經常被喚醒的是**紅鬚綠眼的人欺負黃皮黑髮的人**的記憶，認為**黃皮黑髮的人有權要求免受欺凌**，他們的焦點是國與國和不同種族的關係。直覺主義愛國父母最易引起家庭分裂，他們認為自己的正義原則無須解釋，人人必須認同，但是當他們同樣地以一種與生俱來的必然性來要求80至千禧代認同時，年輕人卻覺得他們食古不化，守護着過時社會的不義。年輕人的生命史在宇宙時空之中是一個短筒，因為英國人一步步退出香港，他們從未經歷過直接被外籍人士欺負的階段。年輕人注重個人與傳統權力的關係，追求的社會公平實際上是擺脫古老傳統的規限，對社會的慣性阻力容忍度低，容易情緒化及混淆民主制度與絕對自由之別。

二十世紀，全球殖民地爭相獨立，去殖民化思想抬頭。殖民地是弱勢群體，在戰爭環境之中必須緊密團結在領導核心之下，放棄一些個人利益，才有力量與強勢的殖民帝國鬪爭，故此全球成功驅逐殖民帝國的，多數都是集權型政府，在中國稱為**人民民主專政**。最近中國開動權力機構逼迫一個十六歲女孩道歉，在國內的人看來這是中國反抗帝國主義分裂中國的反欺凌正義事件；在港、台的年輕人看來這是國家權力機構欺凌個人的不義事件。中

央政府從國與國的層面看問題：有些事情要求國民捨小義，存大義；年輕人從個人與集體的關係看問題：不容忍國家大義變成欺凌的藉口。

在政制改革之初，有人提出「絕對民主」的概念，即是羅爾斯提出的那種可以脫離現實環境，在不觸及個體利益的無知之幕裡面，達致共同接納的公平、正義的終極原則，這種理念對缺少社會經驗的年輕人特別吸引。中央政府將這種要求看成是帝國主義國家欺凌中國，在《一國兩制白皮書》發出強硬信息，香港人解讀為中央意圖違反契約精神，推翻當初一國兩制的協議。最後，中港不能達成協議，因為中央要遏止港獨勢力抬頭，民主人士則是拒絕接受欺凌，政改方案的內容已經不是問題的核心。

自然環境只遵從物理、化學規律發展，不理會人類的主觀意志。社會環境則不同，它受人類的主觀意志影響，有一個奇怪的現象：有時你認定社會存在某一種你不喜歡的現象，你的偏見就會在不知不覺之中摧化那一種現象出現。愛國人士因為憂慮分離主義，而不斷搧風點火，推波助瀾；民主人士憂慮中國一制干預香港，而不斷刺激中央政府。在世界、中國以至香港社會的層面，當人群利益不一致時，要平心靜氣地討論問題比較困難，例如你要為猶太人及巴勒斯坦人做和事老，必然十分艱巨。在家庭之內，父母子女之間大多數沒有利益衝突，只有認知、理解、選擇立場，再加上情緒反應等問題，如果能夠克制情緒，平心靜氣地反思，平衡雙方意見，就算最後想法仍然不一致，父母子女也可能不必反目成仇。

本文插圖clipart及地圖均來自互聯網

[i] 圖片來自
https://www.google.com.hk/search?q=brain+photos&rlz=1T4LEND_en___HK479&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0CBwQsARqFQoTCPmC6e68uccCFYYejgodpmACnQ&biw=1536&bih=691#imgdii=OhRRWmL-JdMtYM%3A%3BOhRRWmL-JdMtYM%3A%3BUfcJTChRYj8T1M%3A&imgrc=OhRRWmL-JdMtYM%3A

[ii] 圖片來自
https://www.google.com.hk/search?q=nerve+cell+network&rlz=1T4LEND_en___HK479&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0CDEQsARqFQoTCPz9oMG-uccCFcyPjgodkC0BOg&biw=1536&bih=691#imgdii=xq_au-nfzsk6AM%3A%3Bxq_au-nfzsk6AM%3A%3B8VQ70HUspssYYM%3A&imgrc=xq_au-nfzsk6AM%3A

[iii] 本例子引自維基百科
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%B4%9D%E5%8F%B6%E6%96%AF%E5%AE%9A%E7%90%86

淺談文憑試化學科的命題取向

潘永強
香港科學創意學會理事

在香港文憑試化學科的命題裡，總有一些令學生容易失分的試題，這些題目往往考核學生知識結構的含糊點、易錯點或盲點，若在考試的過程中，審題明確，掌握試題的要求，正確運用學科的知識，排除干擾，不難在文憑試取得優異的成績。筆者嘗試分析過去幾年文憑試化學科部份試題與老師、同學分享：

[例一] 下列哪一反應是吸熱反應？

A $H_2O(l) \rightarrow H_2O(s)$
B $CuSO_4(s) + 5H_2O(l) \rightarrow CuSO_4 \cdot 5H_2O\ (s)$
C $2H_2O\ (l) \rightarrow 2H_2(g) + O_2(g)$
D $Ca(s) + 2H_2O(l) \rightarrow Ca(OH)_2(aq) + H_2(g)$

(2012 考試局 DSE 樣板試題)

評析

文憑試的考生一般缺少實驗運作經驗，化學實驗的過程是盲點，實驗結果是知識結構的含糊點，主要原因是化學科內容繁多，也需要進行校本評核，其他與校本評核無直接要求的實驗，教師寧願減省實驗而多作授課，故此實驗命題是大多數學生的盲點，考生沒有無水硫酸銅(II)的水合過程實驗的經驗，而鈣與水是一放熱反應也被部份考生在實驗課時忽略，學生只著重氫氣的放出；若考生排除干擾，知道點燃氫氣是一高度放熱的反應，它的逆反應一定是高度吸熱的過程，適當地運用逆向思維便可正確地選擇 C。

[例二] 亞硫酸氫鈉 ($NaHSO_3$) 與鋅反應只生成連二亞硫酸鈉 ($Na_2S_2O_4$) 和氫氧化鋅。$Na_2S_2O_4$ 通常用來漂白紙張。

(a) 寫出 $NaHSO_3$ 與鋅反應的化學方程式。
(b) 鋅在這反應的角色是什麼？

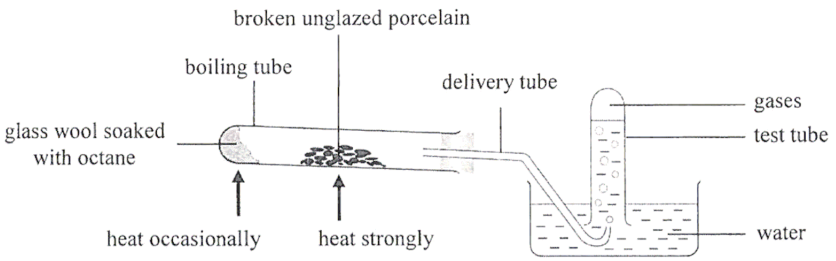
(2011 年 CE 化學卷一)

評析

書寫方程式是化學科的重點要求，很多考生都含糊了事，用背誦的方法過關，遇到一些陌生的方程式，便束手無策了；每年文憑試都要求考生書寫方程式，近年有要求書寫離子方程式，翻開 2016 文憑試卷 I 即有辛烷熱裂解 (Q3 (c))、碳酸氫鈉與檸檬汁的反應 (Q6(c))、試卷 II Q1(b) 氨氧化成一氧化氮、二氧化氮氧化成硝酸和試卷 II Q3(b)重鉻酸鉀氧化鐵 (II) 離子的化學方程式，所以化學科在教授書寫化學方程式的過程，不可掉以輕心，同學若能掌握書寫方程式的技巧，教學已經成功一大半了。

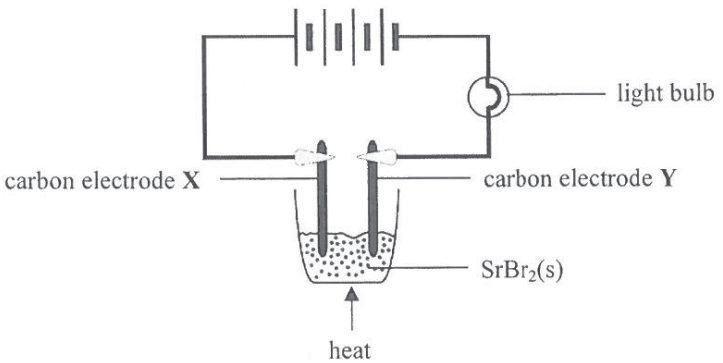
[例三]

(a)



(2016 DSE 化學卷一 Q 3)

(b)



(2016 DSE 化學卷一 Q 8)

評析

實驗安全措施是化學科重中之重的課題，學生進行化學實驗時必須充分了解實驗的危險性，此類問題每年都不可或缺；今年提問實驗完成後如何處理集氣槽(化學卷一 Q 3)和出現有毒溴蒸汽的化學安全措施。

這類問題的概念不深奧，但實用性高，其他例如稀釋濃硫酸的步驟，家用漂白劑不能與酸性清潔劑混和使用，也是文憑試化學科常見的命題。

[例四] 解釋石墨烯(graphene)的性質： 高熔點、良好的導電性和化學性質。

(2014 DSE 化學卷一 Q 1)

評析

DSE 化學科命題也緊跟最新的科研發展，資料是教科書所缺乏，前線教育同工必須與時並進，把科學最新成果引進課堂；例如今年剛剛把最新的四種人造元素命名，它們的同位素、相對原子質量計算和在週期表所屬的族也是上好的評鑑素材。

Seeing the Invisible through the Lens of Heart: Creating Dialogic Space in Mathematics Classroom through Action Research

Huk-yuen Law[1] and Pui-sze Wong[2]
Department of Curriculum and Instruction
The Chinese University of Hong Kong

> Each day (~~I~~) *we as teachers* learned something about the (~~little prince's planet~~) *students' mathematics islands*, (~~his~~) *their* departure from (~~it~~) *these strange lands*, (~~his~~) *their* journey. The details came very slowly, in the course of conversation.
>
> (Saint-Exupéry, 1995, p.18; the deleted and the italics are the first author's)

> Now here is my secret, very simply: you can only see things clearly with your heart. What is essential is invisible to the eye.
>
> (Saint-Exupéry, 1995, p.72)

Introduction: Practice, heartwork and co-agential learning

It appears that we all agree 'learning requires *practice*'. Yet to what extent do we have thought of the nature of practice itself that is of value for fostering the virtues of learning? To foster the virtues of learning in general and of mathematics learning in particular is to invite all teachers (as well as all stakeholders as involved in the educational process) commit themselves *ethically* to building and sustaining a community of inquiry for understanding of what the self means to us as a human. If we as teachers are to take seriously 'self-understanding' as a fundamental construct for learning, the principles of creating meanings must be put into practice by us and be applied to the actual design and practice of teaching in order to provide opportunities for the students to make sense of what they have learned in the classroom. It then follows from this line of thinking that teachers requires to undergo deep reflection through the voice of the self of what constitutes teaching as a meaningful human activity. If teaching is regarded as a *practice*, it implies that "there is a body of authoritative knowledge that identifies both the goals of the practice and the procedures to be applied to achieve these goals" (Hogan, 2011, p.27). In doing the practice of teaching in defense of preserving the well being of the learners, teachers need to have a self-

[1] The former Programme Co-ordinator of B.Ed. in Mathematics and Mathematics Education (BMED) Programme launched by Faculty of Education of CUHK in 2012. He is now still teaching the Course "Action Research in Mathematics Classroom" for the Programme after his retirement from the Faculty in 2015.

[2] The Year 4 student of BMED Programme. She has completed her first block of Teaching Practice in a primary school in the second semester of this year and will have the second in a secondary school in Year 5 before graduation from the Programme in 2017.

understanding of who and what they are when being situated in a 'professional culture' dominated by extrinsic goals such as covering of a syllabus merely for examination purposes.

As a mathematics educator, I_1 (the first person singular of first author) adore Pádraig Hogan's (2010) calling to urge teachers develop the relationships that comprise the *heartwork* perspective in their own practice – relations with students, with colleagues, with teaching subjects (such as mathematics), with one's self. Among these four relationships, it is the last one that addresses the teacher's self-understanding orients the very teacher to take action for creating practical thought-experiment in order to make a difference of developing the other three dimensions of relationships. In so doing, it requires the teacher to have *courage* to make a difference and a caring *attention* to respond to the purposeful interaction with the students within and without the confine of the classroom. The words courage (with its root *coeur* or 'heart' in French) and attention (with 'heart' as its literal meaning in Hebrew) disclose the secret of teaching trick – only with heart can we as teachers see the growth and transformation of the children we teach and very often than not the process of these changes is simply invisible to the eye. The quotes as I_1 have cited in the beginning of this article come from Antoine de Saint-Exupéry's *The Little Prince* as well known to many of us. If the mathematics teacher believes the trick of seeing the invisible through the lens of heart, she will always learn the details of something (even though very slowly) inside the children's minds in the course of conversation through which she begins to understand the voices behind the different dimensions of relationship as related to the heartwork theme – "voices that seek to say something; voices that need to be brought to life through the teacher's actions so that students can engage keenly and conversationally with them" (Hogan, 2011, p.36).

Teaching and learning can be understood as a human activity being inseparable from one another and integrated as a whole situated in the domain of human relations. "To understand a subject as a voice… that it gives a particular significance to the relationship one has to a subject as a learner, and even more so as a teacher. A voice is something active, something that addresses us and calls forth a response" (Hogan, 2010, p.60). If learning can be regarded as the first-order activity and teaching as the second-order, I_1 as a teacher educator will adopt a form of second-order research (Elliott, 1991) to cultivate hopes for the student teachers who would learn how to teach through the practice of doing the first-order action research during their practising of actual classroom teaching. And I_1 call this kind of collaborative action research a form of '*co-agential learning'* – through the act of agency as exercised by both the teacher and the student, we come to have a better understanding of what learning means to us.

If we see education as a human practice through which the learners come to understand their growth and transformation, I_1 will argue that only through researching the teacher's own action in doing her practice of teaching can she not only enhance her self-understanding through the

development of the teacher's reflexive relationship to herself but also find the pathways for learning to teach in a more productive way.

This article is an account of action enquiry into exploring how the student teacher documents the self-understanding of her growth and transformation though apparently invisible through action research that she has undertaken during the teaching practice and how I_1 as a teacher educator help highlighting the student teacher's awareness not just to her students and the subject she teaches but also to the sensibility of adapting her perceptive imagination to create a dialogic space in the mathematics classroom. In order to highlight the voice in the writing of such an account, we will use the first person singular (instead of using third person) wherever we consider as appropriate. In this paper, we will use I_1 to denote the first person singular of the first author and I_2 the first person singular of the second author.

Action research and pre-service teacher education

Different action researchers may have adopted different aspects in defining what action research is as drawn on their own understanding of what the notion of 'theory' mean to them and of how such kind of inquiry can have knowledge production (see Carr, 1995). Nonetheless, a fundamental and yet challenging goal that action research has in its rather long history of development is to dissolve the dualism between theory and practice (Elliott, 2004). Among the various definitions, the one below as appeared in John Elliott's (1991, p.69) *Action Research for Educational Change* has been widely cited in the scholarly works within the field of action research.

> Action research might be defined as the study of a social situation with a view to improving the quality of action within it.

And yet more than a decade later, Elliott (2004) made a great effort at redefining the relationship between theory and practice with the new highlighting of the development of a theoretical representation of action as anchored with the practical intention of human agents. Such a reformulation has an important implication on teacher education – if the teacher regards herself as an agent of change and makes an attempt at improving the quality of action in a particular situation such as the classroom, she needs to 'theorise' the situation in order to generate the personal knowledge (in the form of practical knowledge) that informs action and that subsequently undergoes the iterative cycles of validation of the action undertaken through testing or experimenting in that particular situation. Furthermore, action research "need(s) not simply involve the agent who wants to effect the changes", argued by Elliott (2004, p.24), and "educational researchers in the academy can collaborate with an educational agent by adopting his/her practical standpoint as though they were in the action context". In other words, the teacher educators have an important role to play in supporting both the practising teachers and the pre-

service teachers to understand and fulfill their complex role especially in a context where the practitioners need to take risks to make a difference (see Kosnik & Beck, 2000).

Recent research literatures have advocated that action research can be adopted as a component as well as a strategy in teacher education in general and in preservice teacher education in particular (for examples, Kosnik & Beck, 2000; Rock & Levin, 2002; Ulvik, 2014). Kosnik and Beck (2000) justify the use of action research as a strategy in preservice education by arguing that "within the relatively safe and supportive environment of the teacher education programme… action research… bring the experience of being a 'real' teacher forward into the preservice year, but in a context such that they feel free to take risks" (pp. 117-118) and having action research as an essential component in a teacher education programme is "an effective way of linking theory and practice … in the minds of the student teachers" (p.118). Rock and Levin (2002) have argued for the role of action research in turning the field experience of preservice teachers into a process of developing themselves into the professional teacher. Among the findings of their study, three themes are worth highlighting. These include (1) self as teacher – the preservice teachers have a chance of clarifying their personal teaching philosophies also have a better understanding of themselves as persons; (2) understanding students – engaging in action research enables them to gain insight into student perspectives; (3) roles and responsibilities – adopting the role of "teacher as researcher" enables the preservice teachers to reflect more deeply of what roles and responsibilities the teacher should have. Ulvik (2014, p. 521) has made a good summary of the role of action research (AR) in teacher education :

> teaching and learning are complex endeavours that can always be improved. AR might change practices, but also the theoretical understanding of such practices, and is a way to empower teachers and help them assume control and find their own answers. It is a meta-practice that produces self-knowledge by systematic investigation of practice in dialogue with others.

Four years ago, our university has launched a new programme of B.Ed. in Mathematics and Mathematics Education (BMED). In designing the programme, I_1 as its Programme Coordinator have developed and included in it the course of "Action Research in Mathematics Classroom" as a 'capstone course' of the programme. The students of the programme are required to take the course in the second semester of their fourth year of study and following that they will have the first Teaching Practice (TP) in the Primary sector which lasts for a period of eight weeks. And they will have another TP in the Secondary in Year 5 before they graduate from the programme. The objective of the course aims not only to enable the student teachers know the basic techniques of undertaking an action research project but to heighten the self-awareness of seeing their own growth and transformation through the action inquiry that they will attempt during the first TP – the 'real' teaching they will have experienced for the ever first time in their life.

Pui Sze (the second author) is one of the first batch intakes of the HKDSE (Hong Kong

Diploma of Secondary Education) stream of the Programme. Being in the fourth year of study, she has just completed her first TP. In this article, I_1 have attempted to make use of Pui Sze's work to illustrate how action research helps student teachers to do 'theorising' of their own experiences of learning to teach and how action inquiry they have conducted during the practicum enables them (and me as well) to see the invisible (their professional growth and the changes of the students they teach) through the lens of heart. In other words, I_1 regard their first TP as an opportunity for them to practice the heartwork of teaching through action research.

Pui Sze's story: Creating dialogic space in mathematics classroom

The context

I_2 was assigned to a Direct Subsidy Scheme (DSS) school for a two-month practicum. There I_2 need to use English as a medium of instruction for the teaching of mathematics. The school encourages students to learn interactively during the lesson as well as out-of-class activities. There are learning themes for each month. In "Mathematics Month", students are encouraged to participate various activities and to discover the beauty of mathematics outside classroom through videos, songs or other special activities.

In the school, there are five classes in each grade and in each grade level, students with better academic results (to be honest, I_2 did not exactly know what criteria being used behind the selection) are pulled out and redistributed into two "split class" groups, thus the five classes will then be regrouped into seven classes -- 2 "split class" and 5 "normal class". In my case, the original class size is 30 but as 8 of them are pulled out for split class (with its class size similar to that of a normal class) so I_2 actually teach 22 students only. Thus, it will be the Grade 4 'normal class' with 22 students as the target group for my investigation.

The challenge: teaching children the concept of fraction

"Fractions" is one of the most complicated yet difficult topics to teach in primary school mathematics (Smith, 2002). What has made it difficult is the involvement of its property of relational numbers: For example, "4/5" (four fifths) represents relationships between two discrete or continuous quantities, instead of a single discrete ("4 apples") or continuous quantity ("5 inches of rope"). Students may mix up on what they know about whole number with concepts on fractions, thus they may come up with some misconceptions or confusion of it.

There are three sub-topics about fractions that I_2 need to cover in my teaching during the practicum:

(1) Comparing of fractions;

(2) Addition of fractions with the same denominator; and

(3) Subtraction of fractions with the same denominator

In teaching mathematics, the challenge for a teacher is to help students construct their knowledge by connecting the new concepts with those they already have and yet students' concepts or ideas in their minds can be only partially correct (Smith, 2002). Thus, the task for me as a teacher is to locate those partially correct thoughts that they have before I_2 can lead them to understand better of what they would learn in the lesson through dialogues.

In developing classroom dialogue with students, I_2 need to focus not just on what answers that they have, but rather on *how* they arrive at getting the results. In my action research project, I_2 want to know what sorts of the learning difficulties or misconceptions that students have in learning fractions and to figure out how I_2 can teach them in a better way.

The answers to a problem as given, whether right or wrong, require the teacher to check for any misconceptions that the students may have. If the answer given is wrong, teachers can try to discover the students' misconceptions. As such, I_2 need to make use of this kind of information to guide further instruction that develops students' correct conceptions (Moskal & Magone, 2002). Even if the answers given were right, teachers might still need to check for any misconceptions behind the workings. Thus, understanding students' misconceptions and the approach students would use in solving a given problem of a certain topic would help me to adjust the schedule and focus of my teaching.

I_2 cannot agree more of what Mousley, Sullivan and Gervasoni (1994) have suggested that quality teaching consists of the components including nurturing, engaging, communicating and also problem solving. Among these, I_2 consider 'communicating' as the crucial one that I_2 want to address. I_2 truly believe that creating dialogue in the classroom could help both students to improve their learning and me as a teacher to improve my teaching. But how can I_2 do that? I_2 approached Prof. Law and consulted him. Thanks to the open dialogue that I_2 have with him, I_2 come to realise that it will be desirable to have a more open dialogic space to be created in the classroom before I_2 can 'see' the invisible thinking that the students have whilst they are attending the lesson or working on some particular mathematics problems. And then I_2 come up with my research question: *How can I_2 adopt action research to create dialogic space in mathematics classroom in order to enhance the Grade 4 students' learning of fractions during my practicum?*

Action as intervention: seeing the children's invisible thinking process

In order to 'see' how the children think, I_2 focus my investigation on some particular lessons and call them the 'research lessons'. Based on the design of pre-test and post-test (will be described later), I_2 will re-modify my own teaching strategies in the teaching of fractions (*I_1 have reminded Pui Sze that the comparison of the results of the two tests is not to be used as 'evidence' to claim for the effectiveness of the teaching performance or for demonstrating how well the design of the lesson plan would be but to serve the purpose of exploring for the clues of understanding to what extent that the students might be 'benefited' from engaging themselves in the lesson*). The working schedule for the pre-test and post-test is shown below.

	Comparing of fractions	Addition of fractions with the same denomination	Subtraction of fractions with the same denomination
Mar 17	Class-activity		
	(Take-home Pre-test)		
April 6		Class-activity	
April 19			Class-activity
			(Take-home WS)
April 20			Discovery: What to do if need to "borrow 1"?)
April 21			Consolidation
May 6	Post-test (in school)		

coloured figure on P.153

Figure 1. Important events/ dates during the practicum

The design of the research lessons

The research lesson will distinguish itself from the normal lesson by allowing the students to engage not only in participating the exploratory activities during the lesson but in writing up of their "thinking process" of their working on the 'special' worksheets that I_2 design for them (see Figure 2). Through the design of this sort of worksheet, I_2 want to keep track of the children's working procedures and steps by asking them to fill it up with their invented procedures, language, and pictures. (Garofalo, Joe, Goodwin, Mtetwa, & Mitchell, 1989). The advantage of using such kind of worksheet is to enable me know better of students' mathematical reasoning behind their working. I_2 would also prepare myself to have debriefing sessions with the students to help them express more explicitly of their thinking during their working on the problems and through them I_2 could see whether that would match what I_2 interpret of what they have written on it.

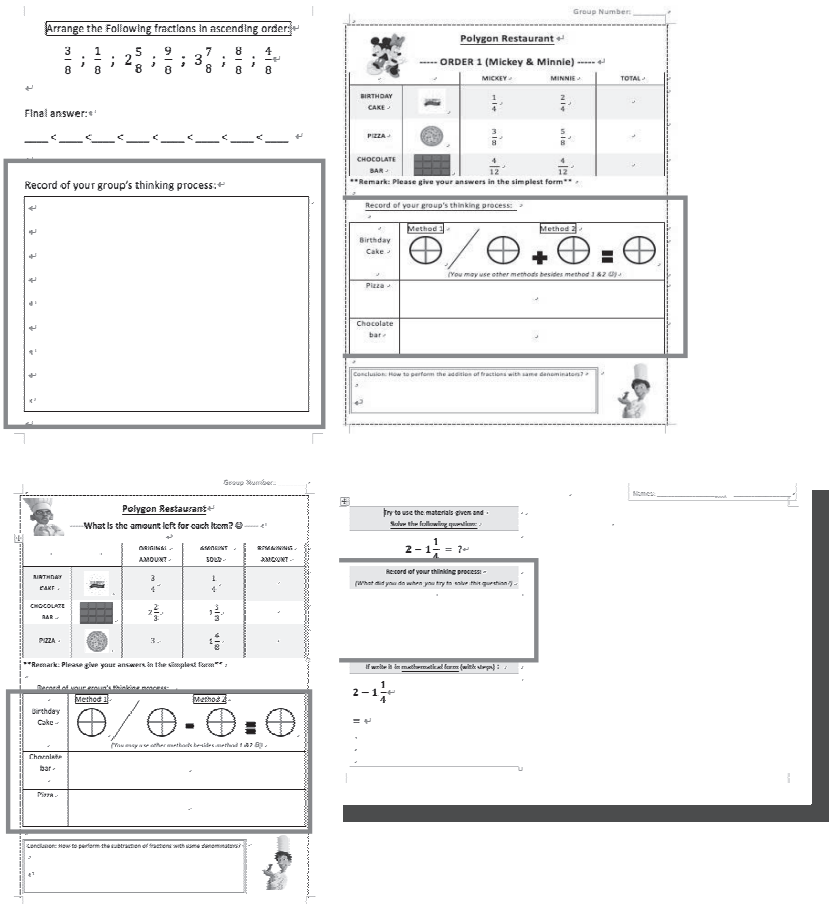


Figure 2. The worksheet designed for documenting children's "thinking process" (to be filled up in square boxes as highlighted here)

To draft the design of the lesson, I_2 would consult some of the literatures for the teaching of that particular topic as included in the school curriculum. Among what I_2 have read, I_2 found what Sharp, Garofalo and Adams (2002) have suggested in the article *Children's Development of Meaningful Fraction Algorithm* inspiring. They highly recommend that teachers should include these 5 steps during the teaching of fractions:

(1) Use personal contexts to develop concepts
(2) Encourage invented procedures
(3) Allow them to use their own language and pictures
(4) Encourage children to keep track of and record work
(5) Move to formal language and algorithms

Based on this suggestion, I_2 introduced the learning theme by providing the students an activity using a specific context that I_2 named it as "holding a restaurant" with its background drawn from the Disney movie "Ratatouille". Students were then asked to take up the role of "cook" whilst working on different tasks involving different concepts of fractions that they needed to learn. For addition of fractions with the same denominators, students were asked to find out the total amount of a certain food after combining orders of different customers. For subtraction of fractions, students were required to find the "remaining amount" of food by the end of the day as they were provided with the original amount and the amount of food sold (in fraction form). Within the practicum, I_2 have altogether undertaken three 'rounds' of experimenting with the attempt to create the dialogic space in mathematics lesson as I_2 teach the three sub-topic of fractions as mentioned above.

Pre-test and post-test: design and results

The design of pre-test and post-test (being structurally equivalent with each other) is mainly focusing on comparing of fractions with the same denominator or numerator, which should have been learned in Grade 3 (see Figure 3). Due to limited time of the lesson, students did the pre-test at home though such an arrangement might have the disadvantage that they could have it completed with the helping hands from their parents. But for the post-test, I_2 have chance of arranging it to be taken by the students in school. I_2 used these tests for the purpose of checking the progress of students' learning and the impact of adopting dialogic teaching in the classroom. The results of these tests are shown in Figure 4.

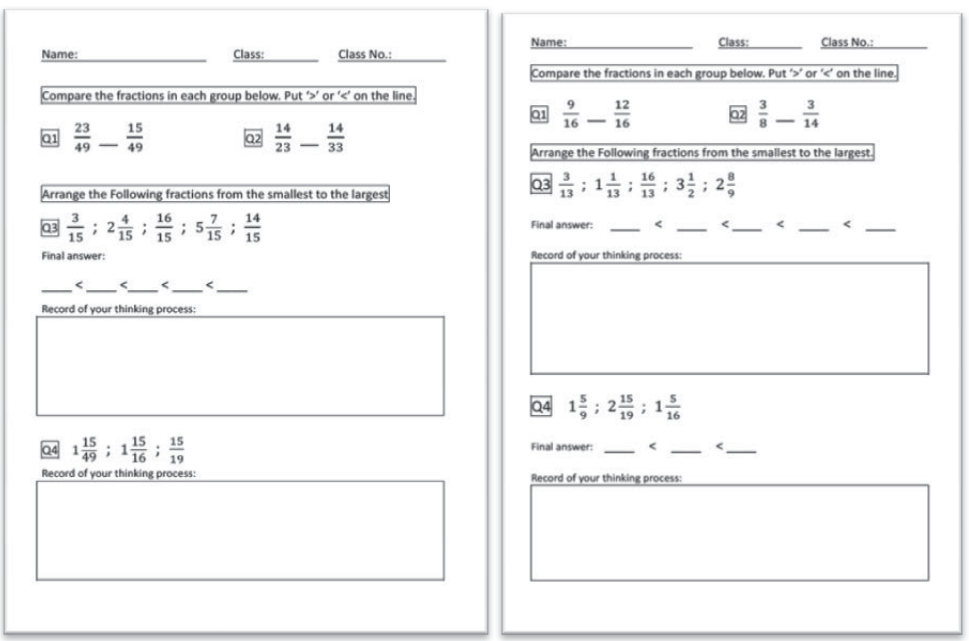


Figure 3. Pre-test (on the left) and Post-test (on the right)

		Pre-test						Post-test						Learning Process :)
	Nick-name	Q1	Q2	Q3	Q4	Number of correct answers	Percetage of correctness (%)	Q1	Q2	Q3	Q4	Number of correct answers	Percetage of correctness (%)	
1	Julia	1	0	1	0	2	50	1	1	1	1	4	100	Improved
2	Claudia	1	0	1	1	3	75	1	1	1	1	4	100	Improved
3	Rachel	1	1	1	0	3	75	1	1	0	1	3	75	Remain Unchanged
4	Aaron	1	1	1	1	4	100	1	1	1	1	4	100	Remain Unchanged
5	James	1	1	1	1	4	100	/						/
6	William	/						1	1	1	1	4	100	/
7	Joanna	1	1	1	0	3	75	1	1	1	1	4	100	Improved
8	Lydia	1	1	1	1	4	100	1	1	1	1	4	100	Remain Unchanged
9	Stephen	1	1	1	0	3	75	1	1	1	1	4	100	Improved
10	Timothy	/						1	1	1	1	4	100	/
11	Ella	0	0	1	0	1	25	1	1	1	1	4	100	Improved
12	Sharon	1	1	1	1	4	100	1	1	0	1	3	75	Regress
13	Anna	1	1	1	1	4	100	1	1	0	1	3	75	Regress
14	David	/						1	1	0	0	2	50	/
15	Michael	/						1	1	1	0	3	75	/
16	Jason	1	1	1	0	3	75	1	1	0	1	3	75	Remain Unchanged
17	Eunice	/						1	1	1	1	4	100	/
18	Esther	1	1	1	1	4	100	1	1	0	1	3	75	Regress
19	Benjamin	1	1	1	1	4	100	1	1	1	1	4	100	Remain Unchanged
20	Grace	/						1	1	0	0	2	50	/
21	Claire	/						1	1	0	0	2	50	/
22	Elizabeth	/						1	1	1	1	4	100	/
Number of correctness		13	11	14	8	3.28571429	82.1428571	21	21	13	17	3.42857143	85.7142857	
percentage		92.9	78.6	100	57.1			100	100	61.9	81			

Improved	5
Remain Unchanged	5
Regress	3
/	9

Figure 4. The Pre-test and Post-test results

The further analyses of the tests

When I_2 looked into the texts of what the children had written in more details, I_2 came up with the following reflections that had guided me to adjust and re-adjust my teaching throughout the practicum: (1) I_2 learned, from the children's responses to the pre-test, of how the lesson could be designed in a better way; (2) I_2 learned, from the comparison of their responses to the two tests, of how the teaching experiences that I_2 had gone through during the practicum could be consolidated through re-evaluating of what I_2 actually have done in the classroom.

Reflections drawn from the pre-test

My first query: Would the students have forgotten of what they have learned in Grade 3?

Students should have learned comparing fractions with same denominator or same denominator in Grade 3. In Grade 4, they should learn how to compare fractions with different denominator by using the "L.C.M. method" (or using the 'reference point' like 1/2). I_2 observed that the results of pre-test for Question 1 (comparing of fractions with the same denominator) and for Question 2 (comparing of fractions with the same numerator) are 92.9% and 78.6% respectively. These findings surprised me and forced me to re-adjust my teaching schedule by providing them with a bit more revision on this part as I_2 believed that without knowing these well they would come up with even much more difficulty in learning of more complex comparing of fractions.

My second query: Would the students use any alternatives as strategies for comparing fractions?

Another discovery from the pre-test (and also found in the class activity worksheets) is that most students seemed to adopt the 'mixed number must be largest' strategy for comparing fractions with their reasoning such as: proper fractions must be smallest, then improper fraction is larger than proper fractions, and mixed number is the largest (see Figure 5).

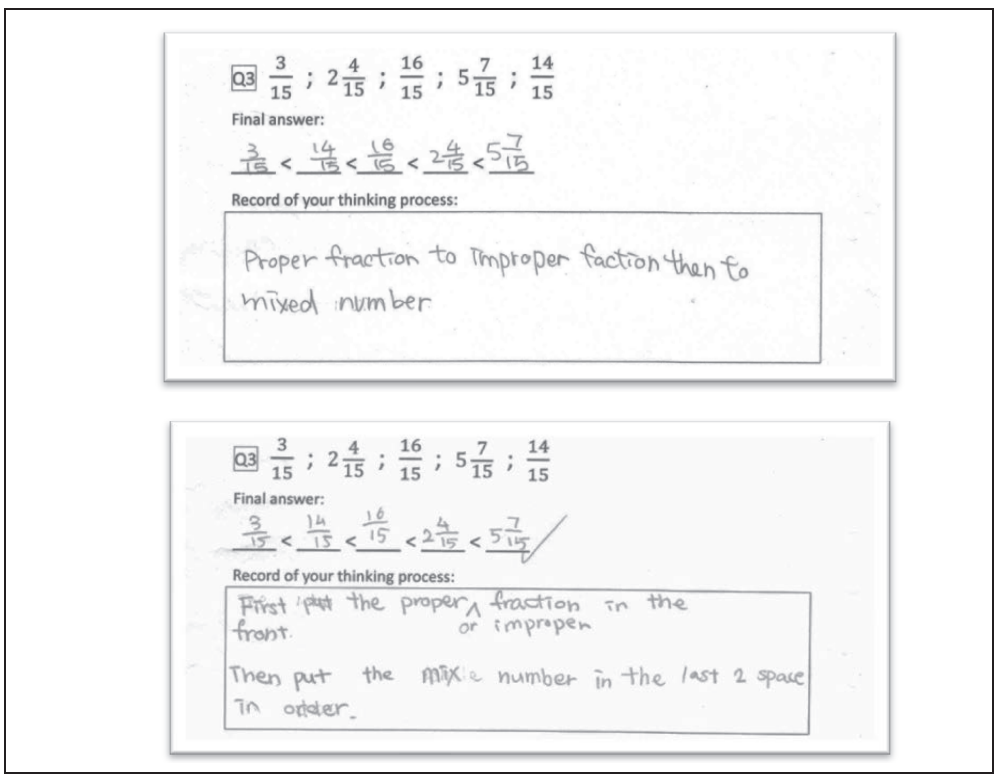


Figure 5. Two students' thinking in the pre-test (the above is Julia's and the below is Lydia's)

Without the aid of the "thinking process" boxes, I_2 could hardly discover this kind of misconception and as such I_2 would hardly have further and deeper conversations with students on discussing how their misunderstanding could be clarified in the classroom. What I_2 did was to provide a counter example, such as $\frac{100}{9}$, and asked students to judge whether this improper fraction would have a larger value when compared to the mixed number. Upon hearing this, most of them reacted with "Ohhhhh…." And they discovered for themselves that the "rule" (i.e. mixed number does not necessary larger than improper fractions) they used was not necessarily true.

Based on the analysis of the pre-test, I_2 adjust the challenge of Question 3 in the post-test by setting the improper fraction to be larger than one of the mixed number as given. In other words, if the students still have the misconception by sticking to the rule they have used in the pre-test, they would get wrong answers. In the post-test, I_2 felt glad that Julia got the answer right and also provided me with the correct explanation ("change the mixed number to improper fraction", see Figure 6).

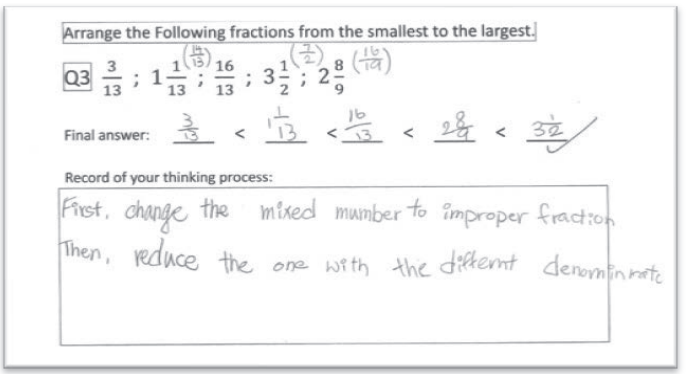


Figure 6. Julia's working on Question 3 in the post-test

Figure 7 shows some of the sample works that I_2 have collected from other students who have also demonstrated a clear understanding of the ideas they have learned in the lessons though of different levels in terms of the quality of expressing the thinking behind their working.

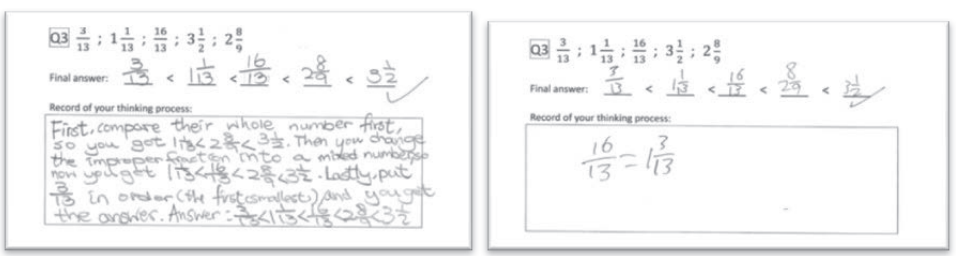


Figure 7. Some of the sample works that have demonstrated students' clearer understanding of the concepts learned.

Discoveries from the use of activity worksheets

My first discovery: There are disparities between calculation and the meaning of context

After doing activity on subtraction of fractions that involves the idea of original amount and sold amount in Restaurant, students were required to finish a worksheet as their homework for consolidation. However, when going through some of the students' answers, I_2 discovered that they actually finished their calculations without understanding the context. As shown in Figure 8, students got correct answer for section below, but he just directly added up the fractions shown in the box. This might came from the confusion of the previous activity on doing addition of fractions in the boxes that looked similar to them (see Figure 9).

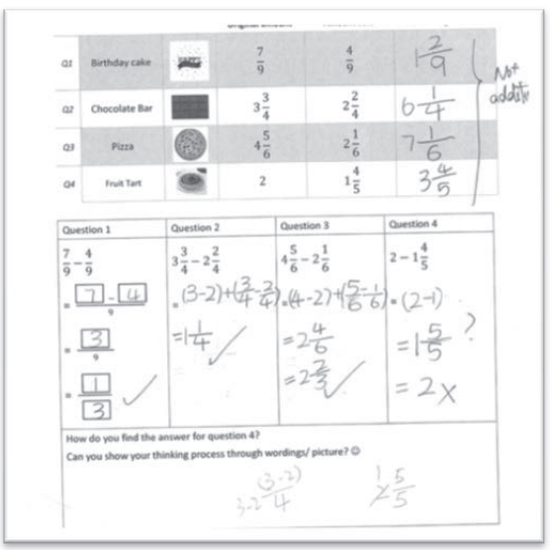


Figure 8. James' s working on post-activity worksheet about subtraction of fractions with the same denominator

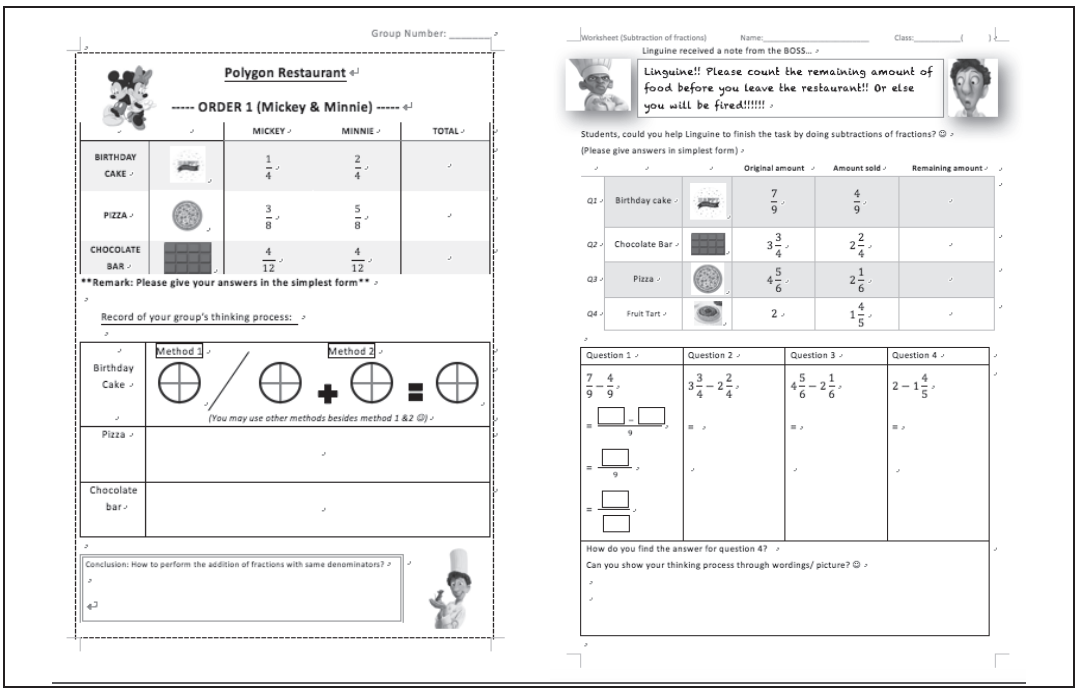


Figure 9. Activity worksheets on addition of fractions (on the left) and subtraction of fractions with the same denominator (on the right)

To help them overcome this kind of mistakes, I_2 restated what they had done and learned in pervious lessons by using power points so as to recall their memory of what they should have learned (see Figure 10). It appeared that students caught it up quite quickly and realized the problem of the mistakes they had made.

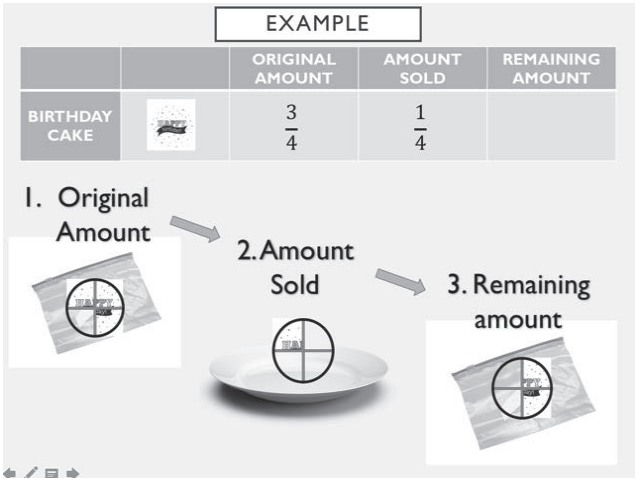


Figure 10. Power-point slide used in lesson for explanation

My second discovery: Students got some sort of difficulties of using algorithm

Going through students' answers given on worksheets, I_2 found that they did have different ways of representing their thinking process on subtraction of fractions. (I_2 did not teach them the "correct method" before they attempted the worksheet, see Figure 11).

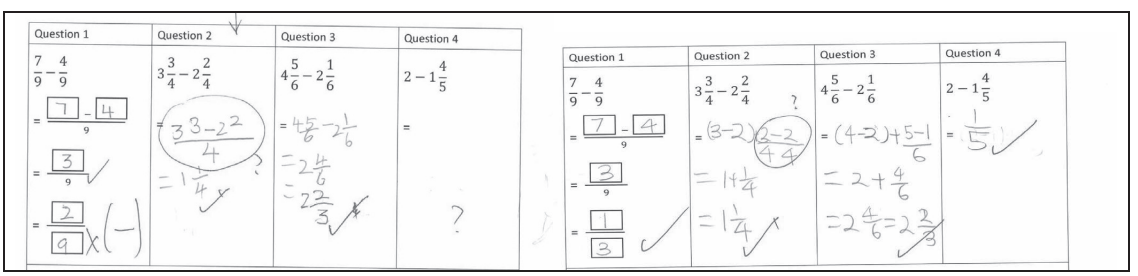


Figure 11. Some of the sample works that showed students' difficulties of using algorithm to do the subtraction of fractions with the same denominator

It is difficult for me to go through different answers one by one. Then, I_2 consulted Ms Wong, my mentor, of what could be done with the difficulty that I_2 had. With her advice, after the lesson on April 20, I_2 demonstrated the whole working mechanism of the questions step by step in class on April 21 (see Figure 12). I_2 distributed the worksheet to the students in order to help them: (1) convert their working procedures and ideas into the proper use of conventional algorithms and (2)

assist them adapt to the formal practice of using mathematics language to express themselves (Sharp, Garofalo, & Adams, 2002).

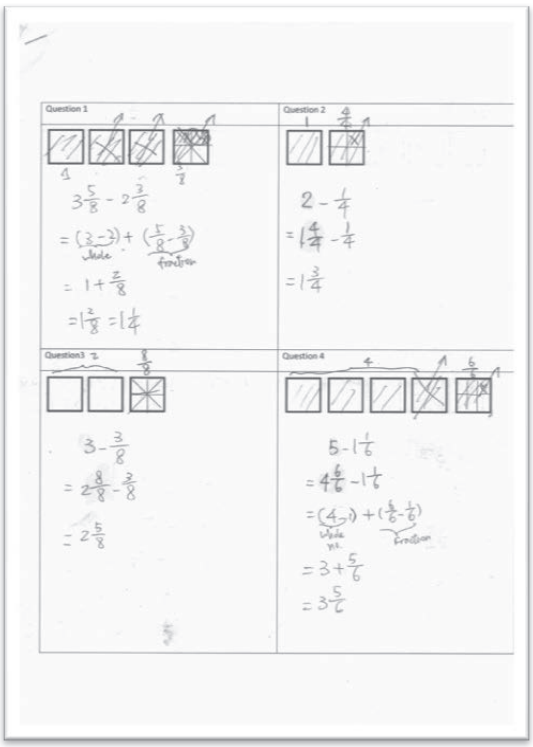


Figure 12. The step-by-step class demonstration of the working procedures

The post-TP reflection: caring wholeheartedly for making meaning together with the children

After the practicum, I_2 have learned that teaching primary mathematics is not only challenging but also interesting since students might give me unexpected responses and answers to the questions I_2 would have asked in the classroom. As a teacher, I_2 do have a role to play in guiding students to explore the different faces of mathematics through different "doors" or "windows". The interesting part of teaching is that it requires not the teacher alone but both the teacher and the students to pay together their efforts at determining what sorts of these doors or windows that would best fit them. And also, the teacher needs to have adequate knowledge of mathematics in order to be capable of introducing more windows or doors to the students through more meaningful dialogues with them

during the lesson. Perhaps, it is a science of designing an experiment for teaching but I_2 believe that it is an art on how mathematical knowledge should be taught to the students.

Besides the relationship with mathematics, I_2 have also learned that the trustful relationship that needs to be built up between students and the teacher is of utmost importance. Without it, I_2 could hardly create the dialogic space in the classroom. On the one hand, students need to have trust on the arrangement that teachers find it useful for enhancing their learning; and on the other hand, the teacher needs to trust her students that they have already done their best to do the tasks as assigned. After all, it comes to my understanding that it takes time for students to adapt to a new approach as adopted such as the one I_2 used in the practicum.

Before I_2 move on to depict what I_2 have developed the relationship with my own self, I_2 need to say some words about the relationship with the school teachers who have offered me their generous supports during the practicum. Among them, Ms Wong (who acts as my mentor is so happened to be Prof. Law's former student) has kindly provided me with lots of good advices and constructive comments to the ideas that I_2 shared with her during the various stages of my investigation. Thanks to her help and encouragement, I_2 felt more relaxed and became more confident to create a dialogic space in mathematics classroom. Indeed, *thanks to her openness* in co-developing with me a dialogic space through which we can have a frankly exchange between each other on how mathematics can be learned in a more meaningful way. (*I_1 consider this kind of exchange as a 'professional dialogue' through which both the preservice teacher and the practising teacher will gain benefits from engaging in it, see Simoncini, Lasen, & Rocco, 2014*).

Creating dialogic space in mathematics classroom is challenging to quite many teachers. I_2 admit that I_2 have shared their fears of adopting such an approach as it can be seen as a 'waste of (classroom) time'. As teachers, we may have fears, lots of things to fear indeed: being afraid of not having enough time to teach, too much noise that turns the lesson into a chaos, and even simply afraid of doing something 'odd' in the eyes of the other colleagues. If we as teachers want not to suppress the students' voices, I_2 do believe that we need to have the *courage to teach*. The courage to teach means that we need to keep our hearts open in moments when the heart is asked to hold more than it is able, so that both teachers and students, and also the subject itself can be bring together into a community that learning and living require (Palmer, 2010). With the courage to teach, teachers can go on with their journey though full of uncertainty. And I_2 do see such kind of uncertainty as opportunity to look for something wonderful and something amazing to come in the journey I_2 am going to travel through.

The conclusion: action research as the heartwork of teaching

In this conclusion, I_1 would like to adopt one of the heading of the sections as appeared in John Elliott's article "The Spiritual Dimension of Teaching: A View of Educational Action Research" (2013) as the subheading here – '(Educational) action research as the heartwork of teaching'. In it, he argues

> It is the practitioner's quest with their peers for knowledge of the good that characterises and pinpoints the spiritual dimension of a social practice. It involves imaginative action experiments and a deepening self-understanding. Such a process may be depicted as action research… Accounts of it will consist of stories about the quest for knowledge of the good. Such stories will include narratives about how prejudices were overcome and new self-understanding developed in the action research process (p.9).

What Pui Sze has done during her practicum illustrates the very account of action research that consists of *stories* not just about the quest for knowledge of the good but also about the emerging self-understanding in the process of creating dialogic space in the mathematics classroom. Drawn on Hogan's (2010) perspective of depicting the search for self-understanding as 'heartwork', Elliott (2013) claims that such kind of 'heartwork' can be seen as a form of action research as it already "illustrates 'the work of the spirit' in teaching" (p.12). The story that Pui Sze has told us reflects this kind of search for self-understanding through the documented observations on her relationships to the subject she teaches (mathematics), to the students, to 'colleagues' (the mentors), and most important of all to herself. And I_1 truly believe that such a search now brings her a *voice* that calls forth a response to the action inquiry journey of becoming a mathematics teacher.

References

Carr, W. (1995). *For education: towards critical educational inquiry*. Buckingham: Open University Press.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Open University Press, Milton Keynes (published in Spain by Morata: Madrid).

Elliott, J. (2004). The struggle to redefine the relationship between «knowledge» and «action» in the academy: some reflections on action research. *Educar 34*,11-26.

Elliott, J. (2013). The spiritual dimension of teaching: a view of educational action research. (pp. 6-16). In J. McNiff (Ed.), *Value and virtue in practice-based research.* London and New York: Routledge.

Garofalo, J., Goodwin, V., Mtetwa, D., & Mitchell, B. (1989). Some observations of Seventh Graders solving problems. *Arithmetic Teacher, 37*, 20-21.

Hogan, P. (2010). *The new significance of learning: Imagination's heartwork*. London; New York: Routledge.

Hogan, P. (2011). The ethical orientations of education as a practice in its own right. *Ethics and Education, 6*(1), 27-40.

Kosnik, C. & Beck, C. (2000). The action research process as a means of helping student teachers understand and fulfill the complex role of the teacher. *Educational Action Research, 8*(1), 115-136. DOI: 10.1080/09650790000200107.

Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2002). Making explicit what students know about representing fractions. In B.H. Litwiller, & G.W. Bright, *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 121-129). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mousley, J. A., Sullivan, P., & Gervasoni, A. (1994). The analysis of teaching: Constraints in lesson description and critique. In G. Bell, B. Wright, N. Leeson, & J. Gleake (Eds.), *Challenges in mathematics education: Constraints on construction* (pp. 437-444). Lismore: MERGA.

Palmer, P. J. (2010). *The courage to teach: Exploring the inner landscape of a teacher's life*. New York: John Wiley & Sons.

Rock, T.C. & Levin, B.B. (2002). Collaborative action research projects: Enhancing preservice teacher development in professional development schools. *Teacher Education Quarterly, 29*(1), 7-21.

Saint-Exupéry, A. de (1995). *The little prince*. (Trans. T.V.F. Cuffe). London: Penguin Books.

Sharp, J. M., Garofalo, J., & Adams, B. (2002). Children's development of meaningful fraction algorithms: A kid's cookies and a puppy's pills. In B.H. Litwiller, & G.W. Bright, *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 18-28). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Simoncini, K. M., Lasen, M., & Rocco, S. (2014). Professional dialogue, reflective practice and teacher research: Engaging early childhood pre- service teachers in collegial dialogue about curriculum innovation. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(1), 27-44. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2014v39n1.3

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B.H. Litwiller, & G.W. Bright, *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 3-17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ulvik, M. (2014). Student-teachers doing action research in their practicum: why and how? *Educational Action Research, 22*(4), 518-533. DOI: 10.1080/09650792.2014.918901.

Secondary School Students' Self-Efficacy for Scientific Inquiry

Derek Cheung
The Chinese University of Hong Kong

Introduction

Recently, the Curriculum Development Council (2016) published a revised framework for the Hong Kong Secondary 1 – 3 science curriculum. The framework delineates six categories of science process skills: observing, classifying, designing investigations, conducting practicals, inferring, and communicating. These skills are essential to engage students in scientific inquiry. However, little is known about the extent to which Hong Kong junior secondary students have mastered these science process skills. This short paper aims to demonstrate how to assess students' self-efficacy for scientific inquiry. The results are useful for school teachers to reflect on their lesson planning and teaching strategies.

There are many different affective variables influencing student learning in school science, such as interests, attitudes, self-concept, self-efficacy, aspirations, and anxiety. The importance of the self-efficacy construct is well documented in the literature (e.g., see Bandura, 1997; Cheung, 2015a). Self-efficacy for scientific inquiry can be defined as one's beliefs about his or her ability to successfully perform specific tasks involved in scientific inquiry. Although self-efficacy is not equivalent to competence, there is empirical evidence to show that self-efficacy can positively influence task performance (Lynch, 2006; Merchant et al., 2012; Multon, Brown, & Lent, 1991; Robbins et al., 2004). Sometimes, knowledge, skill and prior academic performance may not be strong predictors of subsequent task performance because self-efficacy beliefs affect the ways in which students will behave when carrying out specific tasks (Cheung, 2015a). Thus, it is important to investigate Hong Kong students' self-efficacy for scientific inquiry to identify areas of needed improvement. Appropriate interventions may then be planned and implemented to help students.

Methodology

How much confidence do Hong Kong students have in performing each of the tasks involved in scientific inquiry? To answer this question, I have developed a 9-item questionnaire to assess students' self-efficacy for scientific inquiry. The items of the questionnaire were written in Chinese and have been translated into English for reader information in Table 1. They focused on nine specific tasks, including planning a fair test, collecting experimental data, analyzing and presenting data, drawing conclusions, and identifying major sources of errors. The nine items were prefaced with the heading "How confident are you that you can perform the following science inquiry tasks?" and students were asked to rate each item on a 6-point scale (from 1 = highly

unconfident to 6 = highly confident). In January 2016, I invited one class of Secondary 1 students (n = 28, mean age = 12.18 years, SD = .39) and one class of Secondary 2 students (n = 34, mean age = 13.21 years, SD = .41) from a band 1 boys' school to participate in the survey. Cronbach's alpha for the 9-item instrument was .78 for this small sample, indicating that the student data were of acceptable reliability.

Table 1: Results of questionnaire survey

	Class	Mean	SD
1. Propose appropriate science inquiry questions and hypotheses	S1	4.18	.61
	S2	4.18	.83
2. Control variables when designing experiments for a fair test	S1	4.39	.79
	S2	4.68	.98
3. Design experimental procedures to test hypotheses	S1	4.19	.83
	S2	4.44	.96
4. Predict experimental results with reasons	S1	4.18	.72
	S2	4.38	.95
5. Handle apparatus and chemicals safely	S1	5.21	.83
	S2	5.09	1.12
6. Observe, measure, and record experimental data accurately	S1	4.63	.74
	S2	4.62	.92
7. Suggest possible explanations for the results	S1	4.36	.73
	S2	4.41	.70
8. Use appropriate tables and graphs to present and analyze data and draw conclusions	S1	3.86	.80
	S2	4.03	1.03
9. Suggest possible reasons for getting incorrect data or results	S1	3.86	.85
	S2	4.00	.85

Results and Discussion

Means and standard deviations are displayed in Table 1. Independent-samples t tests were conducted to evaluate whether Secondary 2 students had higher levels of self-efficacy than Secondary 1 students, but the tests were not statistically significant for any of the nine items.

As can be seen in Table 1, the mean score of item 5 was the largest on a 6-point rating scale for both Secondary 1 and Secondary 2 students. This finding suggests that students expressed the highest level of self-efficacy for handling apparatus and chemicals safely when conducting scientific inquiry. However, the mean scores of other items were well below 5.0, particularly the mean scores of items 1, 8, and 9. It is noteworthy that these 62 students were from a top band 1 boys' school. It is more likely that students from band 2 and band 3 schools may have even lower

levels of self-efficacy for scientific inquiry. Therefore, all secondary schools in Hong Kong, irrespective of banding, should provide students with more opportunities to propose science inquiry questions and hypotheses, use appropriate tables and graphs to present and analyze data and draw conclusions, and suggest possible reasons for getting incorrect data or results.

How can Hong Kong school teachers enhance students' self-efficacy for scientific inquiry? According to Bandura (1997), students construct their self-efficacy beliefs in a given domain of activity based on information from four major sources: enactive mastery experiences; vicarious experiences; verbal persuasion; and physiological and affective states. Enactive mastery experiences refer to students' actual experiences of success in task performances. In general, repeated successes raise self-efficacy whereas repeated failures lower self-efficacy. Research has shown that enactive mastery experiences are the most influential source of information (Arslan, 2012; Britner & Pajares, 2006; Kiran & Sungur, 2012; Klassen, 2004; Luzzo et al., 1999; Usher & Pajares, 2006) because they provide the most authentic evidence of performance accomplishments. To help more students master the science process skills, Hong Kong teachers need to design inquiry-based laboratory work for academically diverse students. Regularly helping students to use deep learning strategies (Cheung, 2015b) when conducting scientific inquiry is also important. Professional development activities provided by the Education Bureau should emphasize the implementation issues with inquiry-based laboratory work (Cheung, 2011).

Vicarious experiences refer to experiences gained by watching other students doing something. Modeling is an effective source of information for promoting a sense of personal self-efficacy, particularly when the observer and the target person have similar characteristics (Bandura, 1997). Students who observe classmates performing an inquiry task successfully are likely to believe that they, too, can do it. Verbal persuasion refers to persuasion that one can perform a task by a trustworthy source such as the science teacher. Telling students that they are making progress in planning experimental procedures may enhance their self-efficacy for planning scientific inquiry, but the feedback must be specific so that students can adequately recognize the cause of their success. Physiological and affective states refer to how students feel before, during, and after engaging in an inquiry task. To enhance self-efficacy for scientific inquiry, students must not be overwhelmed with negative physiological or affective reactions (e.g., rapid heart rate, trembling, sweating, feelings of anxiety, feelings of inferiority) in the learning process.

Conclusion

For Hong Kong students to be successful in scientific inquiry, a strong sense of self-efficacy is essential. Self-efficacy for science inquiry is a specific estimate of confidence in one's capability to successfully perform particular tasks involved in scientific inquiry. Using a small sample as an example, my survey revealed that most of Hong Kong Secondary 1 and 2 students may lack

self-efficacy for formulating inquiry questions, proposing hypotheses, using tables and graphs to analyze data and present ideas, drawing conclusions based on the data, identifying sources of errors, and explaining anomalous data and results. I hope that these preliminary findings would serve as a springboard for further research on how Hong Kong students' self-efficicacy beliefs influence their performance on scientific inquiry.

References

Arslan, A. (2012). Predictive power of the sources of primary school students' self-efficacy beliefs on their self-efficacy beliefs for learning and performance. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *12*, 1915-1920.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: W. H. Freeman.

Britner, S. L. & Pajares, F. (2006). Sources of science self-efficacy beliefs of mid-dle school students. *Journal of Research in Science Teaching*, *43*, 485-499.

Cheung, D. (2011). Teacher beliefs about implementing guided-inquiry laboratory experiments for secondary school chemistry. *Journal of Chemical Education*, *88*, 1462-1468.

Cheung, D. (2015a). Secondary school students' chemistry self-efficacy: Its importance, measurement, and sources. In M. Kahveci & M. Orgill (Eds.), *Affective dimensions in chemistry education* (pp. 195-215). Heidelberg: Springer.

Cheung, D. (2015b). The combined effects of classroom teaching and learning strategy use on students' chemistry self-efficacy. *Research in Science Education*, *45*, 101-116.

Curriculum Development Council (2016). *Science (secondary 1 – 3) curriculum framework: Supplement to the science education KLA curriculum guide (P1 – S6) (provisional final draft)*. Hong Kong.

Kiran, D. & Sungur, S. (2012). Middle school students' science self-efficacy and its sources: Examination of gender difference. *Journal of Science Education and Technology*, *21*, 619-630.

Klassen, R. M. (2004). A cross-cultural investigation of the efficacy beliefs of South Asian immigrant and Anglo Canadian nonimmigrant early adolescents. *Journal of Educational Psychology*, *96*, 731-742.

Luzzo, D. A., Hasper, P., Albert, K. A., Bibby, M. A. & Martinelli, E. A. Jr. (1999). Effects of self-efficacy-enhancing interventions on the math/science self-efficacy and career interests, goals, and actions of career undecided college students. *Journal of Counseling Psychology*, *46*, 233-243.

Lynch, D. J. (2006). Motivational factors, learning strategies and resource man-agement as predictors of course grades. *College Student Journal*, *40*, 423-428.

Merchant, Z., Goetz, E. T., Keeney-Kennicutt, W., Kwok, O. M., Cifuentes, L. & Davis, T. J. (2012). The learner characteristics, features of desktop 3D virtual reality environments, and

college chemistry instruction: A structural equation modeling analysis. *Computer & Education*, *59*, 551-568.

Multon, K. D., Brown, S. D. & Lent, R. W. (1991). Relation of self-efficacy beliefs to academic outcomes: A meta-analytic investigation. *Journal of Counseling Psychology*, *38*, 30-38.

Robbins, S. B., Lauver, K., Le, H., Davis, D., Langley, R. & Carlstrom, A. (2004). Do psychosocial and study skills factors predict college outcomes? A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *130*, 261-288.

Usher, E. L. & Pajares, S. (2006). Sources of academic and self-regulatory efficacy beliefs of entering middle school students. *Contemporary Educational Psychology*, *31*, 125-141.

學數的趣味：「說唱」數學

張僑平
香港中文大學課程與教學學系
朱肇濠
可風中學（嗇色園主辦）

引言

今年四月，一首關於全等三角形的歌曲《SAS, SSS, ASA, AAS》風靡全港（影片網址：https://www.youtube.com/watch?v=h4XprRVDm94），特別在網絡媒體 YouTube 的點擊率超過 62 萬。一時之間，但凡教師在課室提到全等或者三角形，就有學生不自覺哼唱起這首歌曲。這熱潮在小學生當中也廣為流傳。有節奏、有韻律的東西，大概討厭的人不多吧。小學生一般不太明白所唱何物，只覺得好玩，特別是看見學長們親身演繹數學。中學生一般也都知道歌曲內容是關於全等三角形，屬於中一的課題。而無論他們能否掌握三角幾何的概念，能否用全等三角形的判定和性質解題，這首歌都能讓你記住幾個與全等相關的名詞。單憑著這點，所獲得的效果也相當不錯了。

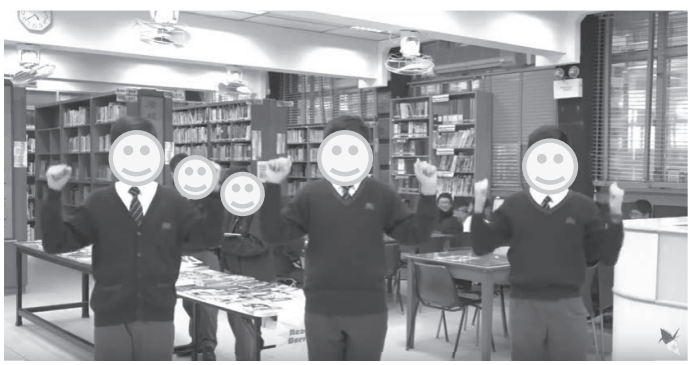


圖 1：學生表演自創全等三角形歌曲(圖片取自網絡)

數學常常被認為是枯燥、乏味，為何一段關於數學的短片影響如此之大？有一點是值得我們關注的：那就是數學原來也可以「唱」出來。你可以說這是音樂的效果，與數學無關，你也可以說沒有多少實質的數學內容（只是幾個數學名詞罷了）。但你無法否認，它的確增添了不少學習趣味，而這不正正是我們現實的課堂上所缺乏的嗎？若學生有了興趣，便可把它與學習內容之間的關係建立起來，這豈不是更有助於往後的學習嗎？

相信很多人都會認同數學可以被視為是一種語言（Baber, 2011）。這語言包括它的符號，它的推理與論證，它的邏輯等等。這種語言特性主要描述的是數學的內容特徵，而這往往也給學習者帶來陌生和恐懼。在早前一項對香港學生數學觀的調查中（黃毅英、林智中、黃家

鳴，1999），研究者發現香港學生的數學觀狹窄，他們往往視數學為「計得到、要用腦」的學科，傾向以數學名詞斷定某些處境是否數學。「數學是抽象的」，「數學就是一堆數字」，「數學就是一堆公式和定理」……這樣的數學觀在中小學生中廣泛存在（教師身上也能找到不少呢！）。就算是對數學不太抗拒的學生，大多都認為數學與日常生活是分割開來的一個學科，也說不上甚麼趣味來。這樣的想法與他們的學習經歷有非常密切的關係。換個方式學數學，多種角度看數學，把數學說唱出來，未嘗不是一種讓數學學習變得有趣生動的方法。以下我們用數學課程中的幾個課題舉例來說明何謂「說唱」數學以及闡述其意義。

圓周率 π

學生接觸圓周率 **π** 始於計算圓形的周界及面積。一時用分數，一時用小數，到後來變無限不循環小數、無理數甚至超越數（transcendental number），理解也不斷加深。但對於 **π** 這個天外來物，除了各種計算公式，能否增添一些故事性和趣味性呢？以前聽過國內的學生用諧音口訣（拼音加文言）熟練記住圓周率到小數點後 22 位，便是一例。

> 山巔一寺一壺酒（3.14159），
> 爾樂（26），苦煞吾（535），
> 把酒吃（897），酒殺爾（932），
> 殺不死（384），樂爾樂（626）。
> π=3.14159265358979323846 26…

圖 2：圓周率諧音口訣的記憶（徐品芳，1997，頁 310）

口訣或歌訣要流行，就需要易學、難忘。不少愛好者創造出背誦到小數點後 100 位的方式（http://tc.wangchao.net.cn/zhidao/detail_5743462.html）。你若要問，記住這麼多有什麼用？誠然，這方法未必能幫你解題，也未必能幫你計到圓形面積，但若是學生因此對 **π**（數學）多了份趣味，又有何不可呢？我們不是常說，要把數學人文性的一面給學生嗎？事實上，誦讀數學對數學學習也是有幫助的，尤其對於華語學生（Ni, Chiu, & Cheng, 2012）。這在華人學生對《九因歌》（或九九乘法表）的背誦上體現得特別明顯（http://www.cantonese.asia/portal.php?mod=view&aid=827）。

畢氏定理 (Pythagoras' theorem)

學完畢氏定理，對學生而言，印象深刻的恐怕就是畢達哥拉斯和那三個平方關係。古代的數學家其實賦予其豐富的生活背景。比如，明朝程大位（1592）在《算法統宗》中便是用詩詞敘述這一問題（「葭生池中」問題），見圖 3 左。（潘有發，1995，頁 73；徐品芳，1997，頁 183[1]）。

[1]徐品芳（1997）對這兩首古詩詞也提出另外的版本，詳可見頁 183 及頁 189，於此不贅。

今有方池一所，每邊丈二無零。
中心葭長一根肥，出水過於二尺。
斜引葭梢至岸，適然與岸方齊。
請君明算更能推，葭長水深各幾。

平平湖水清可鑒，荷花半尺出水面。
忽來一陣狂風急，吹到荷花水中偃。
湖面之上不復見，入秋漁翁始發現。
殘花離根二尺遠，試問水深尺若干？

圖 3：畢氏定理與古詩詞

中世紀印度數學家婆什迦拉（Bhaskara，1114~約 1185）曾在其著作《麗羅娃蒂》(Lilavati)[2]也以對答的形式提出類似的「蓮花問題」（見圖 3 右）。拋開其中包含的數學內容不說，朗誦起來也是朗朗上口（潘有發，1995，頁 85；徐品芳，1997，頁 189、192）。在古詩詞當中蘊藏著數學，將數學、歷史和文學結合，也是一種有趣的表達方式呢！

聯立方程組 (Simultaneous equations)

聯立方程組對許多中學生來講很難，一時消元，一時代入；一時加減，一時乘除，除了解法的「多樣」，也讓學生摸不著頭緒。還有那極其相似，又各有不同的大量練習。對這類方程的探討古已有之，關鍵是作者還編成了詩詞（徐品芳，1997，頁 111-122）。對比正規的數學方程算式，用朗讀的方式閱讀起來是否又韻味不同，趣味橫生呢？下面兩個例子也是來自程大位的《算法統宗》：

一百饅頭一百僧，
大僧三個更無爭，
小僧三人分一個，
大小和尚得幾丁？

三足團魚六眼龜，共同山下一深地，
九十三足亂浮水，一百二眼將人窺，
或出沒，往東西，倚樣觀看不能知。
有人算得無差錯，好酒熏斟贈數杯。

圖 4：聯立一次方程組與古詩詞

方程式不只是 x 和 y 的組合，數學也不只是數字與符號的堆砌。這種將數學問題的表達轉換成詩詞或歌謠形式來呈現時，也能提供問題的情境及想像的空間，誦讀起來別有風味，甚或從文學的情境中去領略數學的美。另外，現在數學舉例強調生活化（是否「真」生活化及有多生活化另當別論），這樣的假設情境也給我們不少教學啟示。

三角比和三角恆等式 (Trigonometric ratios and trigonometric identities)

三角學中三角比名目繁多，比例關係複雜，還有各種不同的數值與符號。坊間便常用 CAST 或者 Add Sugar To Coffee 來記憶各三角比（sin, cos, tan）在每個象限的符號。學生若能結合幾何圖形來記憶和理解自然最好不過，亦有不少人士創出一些「說唱」的口訣來幫助

[2] 原文的英文翻譯源自 H.T. Colebrooke (1817, p.66): In a certain lake, swarming with red geese, the tip of a bud of a lotus was seen a span above the surface of the water. Forced by the wind, it gradually advanced and was submerged at a distance of two cubits. Compute quickly, mathematician, the depth of the water. 中文翻譯成七言詩歌形式，譯者不詳。

記憶三角比 (MacHale, 2012)，比如：

1. Two Old Angels Skipped Over Heaven, Carrying Ancient Harps.
2. Some Old Horses Can Always Hear Their Owners Approach.
3. Some Old Hen Caught Another Hen Taking One Away.
4. Some Of Her Children Are Having Trouble Over Algebra.
5. Some Old Hags Can't Always Hide Their Old Age.
6. Some Out Houses Can Actually Have Totally Odourless Aromas.

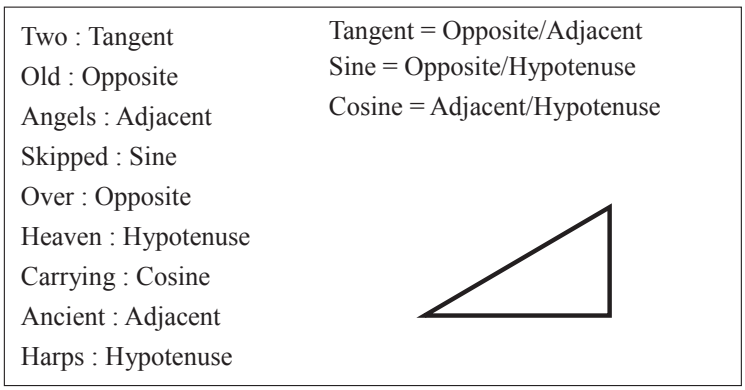
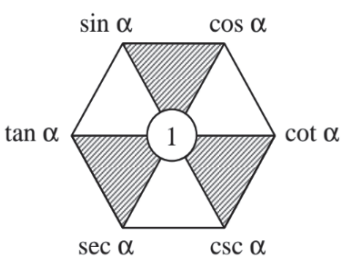


圖 5：三角比的口訣（MacHale, 2012）

本港亦有自行創作的三角學中文歌曲，如 U-數學 A 歌《三角關係》(https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=-1YLF2qSf6k)。當然，這些方式是否真的方便記憶，見仁見智，但個中趣味確實有的。至於種類繁多的三角公式，亦有規律可循。借助圖形，結合口訣[3]來記憶和理解（徐品芳，1997，頁 320-321）。



同角三角函數式，
六角圖形將它記；
對角乘積總是 1，
鄰角邊上商關係；
陰影部分平方式，
看圖便明其中理。

圖 6：三角恆等式與口訣

[3] 在徐品芳（1997，頁 320）中該口訣只有前 5 句，最後一句是首筆者加入。

高等數學 – 群 (Group) 的概念

相比於中小學數學，大學的高等數學嚇怕了更多的學生。但是，唱說數學卻仍然於高等數學中行之有效。高等數學中「群」的概念比較抽象，有外國學生以無伴奏合唱的方式把群的特質以輕快的手法唱出來(https://www.youtube.com/watch?v=BipvGD-LCjU)，成效不錯。這種方式不僅使高等數學中抽象的感覺減弱，而且也更容易與朋友分享。

結語

本文所論及的「說唱」數學並非是甚麼新的事物。這裡只是帶出學習或講授數學，可以有趣味一些，玩味一些。在學生漫長的數學學習歷程中，對於「數學是什麼？數學有什麼用？數學該怎麼學？」這些困惑早已存在。但要回答這些問題，往往涉及到數學觀的層面。學生數學觀的形成，在很大程度上與他們所遇到的學習環境或生活空間（lived space）悉悉相關，而且更直接地受到教師的課堂教學方式影響（Wong, Marton, & Lam, 2002）。教師狹窄的數學觀使得他們佈置一個較刻板的學習環境，這會進一步導致學生的（學習）「成果空間」變得狹窄。Phillips（1996）便曾指出「小學生，甚至是大學生中，都因為認識不到數學的美，而影響到數學學習的態度和學習成績。他們或者認為數學根本不美，沒有學習的興趣，或者認為數學無用，不值得學習和研究」。如果學生能有機會接觸不一樣的數學或者不同的數學學習方式，對於拓闊他們的數學觀，以及提升他們的數學學習不無裨益。

我們常說華人學生習慣或擅長於數學運算、解題，這並非貶義。因為練習亦有多種形式和目的（黃毅英、張僑平，2013）。但若長期沉浸在做題的環境之中，少有欣賞數學、玩味數學之心，也難免形成狹隘的數學觀。相信大家均認同，學好數學不易。但這並不會影響我們去認識它。這就「如同什麼是一首美麗的詩，我們可能不很清楚，但這並不妨礙我們讀詩時去欣賞.....」（Hardy, 1940）。數學教育之目的，除了傳播知識、培養解難能力，還應使數學的文化價值得到進一步的滲透，使學生「對數學學習採取正面的態度，以及從美學和文化的角度欣賞數學」（課程發展議會，2002，頁 7）。本文提及的說唱數學，涉及不少數學的歷史元素，這也是文化價值的一部分。它能有助於數學教師教學方式的拓展，學生亦能從中獲得不同的學習體驗。現實課堂上，除了歷史元素、說唱形式之外，學生或教師自身也可以創造更多新的「學」與「教」方式，來增添學習的趣味，加深對數學的理解。

參考文獻

徐品芳（1997）。數學詩題解。台北：明文書局。

潘有發（1995）。趣味歌詞古體算題選。台北：九章出版社。

香港課程發展議會（2002）。《數學教育 – 學習領域課程指引（小一至中三）》。香港：政府印務局。

黃毅英、林智中、黃家鳴（1999）。數學是甚麼—學生的角度。《數學教育》9 期，2－4。

黃毅英、張僑平（2013）。「華人（數學）學習者現象」：回顧、反思與前瞻。《全球教育展望》，42 卷 5 期，14-25。

Baber, R. L. (2011). The language of mathematics: Utilizing math in practice. Hobokon, NJ: Wiley & Sons, Inc.

Colebrooke, H. T. (1817). *Algebra, with Arithmetic and mensuration: From the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara.* London: John Murray.

Des MacHale. (2012). Mathematics and humour. *The Mathematical Gazette, 96,* 542-543.

Hardy, G. H. (1940). *A mathematician's apology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ni, Y. J, Chiu, M. M., & Cheng, Z. J. (2010). Chinese children learning mathematics: From home to school. In M. H. Bond (Ed.), *The Oxford handbook of Chinese psychology* (pp.143-154). UK: Oxford University Press.

Phillips, J. D. (1996). Aesthetic mathematics: Does mathematics have to be justified by its usefulness? *Australian Mathematics Teacher. 5*2(2), 14 – 18.

Wong, N. Y., Marton, F., Wong, K. M., & Lam, C. C. (2002). The lived space of mathematics learning. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 25-47.

對八隅體的教學反思

方子政
香港教育大學學位教師教育文憑學生

前言

根據現時的課程指引，學生需要找出第 I、II、VII 和 0 族元素的電子排佈與其化學性質的關係（課程發展議會與香港考試及評核局，2007）。當教師與學生討論第 0 族元素的穩定性時，會向學生強調貴氣體原子的最外電子層有 8 個電子（氦除外），令它們十分穩定。與此同時，教師可能會強調其他元素的原子都傾向令最外電子層具有 8 個電子，這種傾向稱爲「八隅體規則」。

「八隅體規則」（octet rule）可以幫助學生繪畫陽離子和陰離子的電子圖，從而讓他們根據離子化合物所含的離子，寫出其化學式。而化學式是學習化學科的基礎知識。例如：學生需要利用化學式來平衡化學反應式，從而進行有關摩爾、亞佛加德羅常數和摩爾質量的計算。即使「八隅體規則」是化學課程的重要知識，但本人發現它爲學生帶來一些迷思概念。例如：很多學生認爲 Na^+ 是較 Na 穩定。

有文獻指出，學生認爲 Na^+及其他離子穩定的原因是它們含有被電子填滿的最外電子層（Özmen，2004）。事實上，獨立的 Na^+ 並不容易存在於標準狀況。原因是由 Na 變成 Na^+ 需要吸收大量的電離能（ionization energy）。由於現時的課程指引並沒有要求學生學習電離能，所以學生未能建立全面的穩定性概念。

爲了解決學生以上的迷思概念，本文希望透過以下的分享，讓各位化學科教師得以參考，從而幫助學生建構一個較全面的穩定性概念。

學生背景

本人任教中三級化學科，而實習的中學以中文爲教學語言。今次的研究以成績較好的學生進行測試。

研究問題

「第 0 族元素與其穩定性」是否令學生構成迷思概念？

研究方法

當本人完成以下教學內容後，會透過紙筆測驗（參考附件一）來考核學生對穩定性的概念。其目的是証明「第 0 族元素與其穩定性」爲學生帶來迷思概念。測驗時限爲五分鐘。

教學內容：

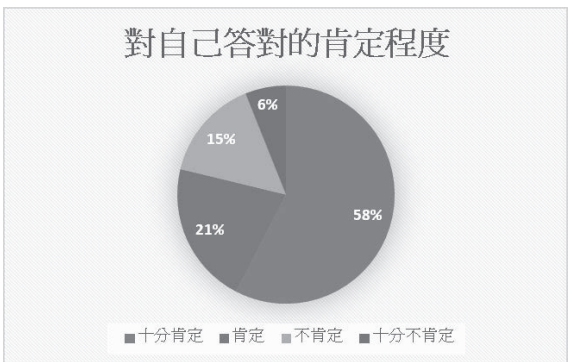
- 元素在週期表中的位置與其電子排佈的關係
- 第 I、II、VII 和 0 族內同族元素的相似性
- 利用電子圖描述離子的形成
- 說明電子轉移而形成離子鍵
- 離子化合物的名稱及化學式

研究結果

測試學生的數目：34 人

題目一：詳細資料可參考附件二

在三個句子中，所有學生都選擇 Na^+ 是較 Na 穩定。



coloured figure on P.153

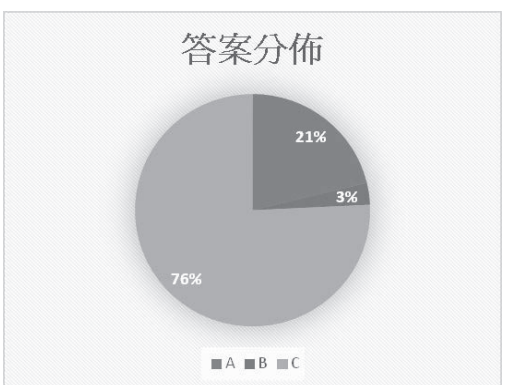
圖一：學生對自己答對題目一的肯定程度

題目二：詳細資料可參考附件三

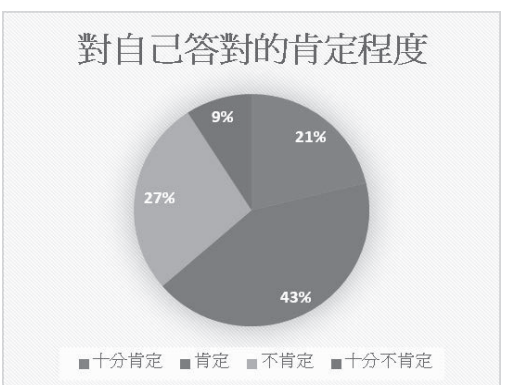
有 7 位學生（21%）認爲 Na 是較 Na^{7-} 穩定。

有 1 位學生（3%）認爲 Na 和 Na^+ 是同樣穩定。

有 26 位學生（76%）認爲 Na^{7-} 是較 Na 穩定。



圖二：題目二的答案分佈



圖三：學生對自己答對題目二的肯定程度

coloured figure on P.153

討論

題目一的分析:

題目一的研究結果顯示，所有學生認爲 Na^+ 較 Na 穩定，而且有接近八成學生表示肯定或十分肯定自己的答案正確。他們的解釋是 Na^+ 是八隅體結構而 Na 不是（參考附件二）。加上，有學者指出，「最外電子層被電子填滿等同穩定」的看法已經主導了學生的思考（Taber，2002）。這反映學生深受「第 0 族元素的電子排佈與其穩定性」影響而作出這樣的解釋。本人認爲當學生看見 Na^+ 的最外電子層有八個電子，達到像氖原子的電子排佈 (2,8)，引致他們直觀地認爲 Na^+ 的穩定性與氖原子的穩定性相同。因此，他們作出「Na^+ 較 Na 穩定」的選擇。

題目二的分析：

本人嘗試反思自己的教學內容後，發現自己經常強調「第 0 族元素的電子排佈與其穩定性」。例如：以下對話是本人利用電子圖描述鈉離子的形成過程。

教師問：「鈉原子怎樣可以達到貴氣體原子的電子排佈（八隅體）?」

學生答：「鈉原子失去最外層的一個電子，便可以達到氖原子的電子排佈（2,8）。」

與此同時，有小部分學生有以下的回應。

學生答：「鈉原子獲得七個電子，便可以達到氬原子的電子排佈（2,8,8）。」

當學生有以上兩個答案時，本人立即向學生說出正確答案是失去最外層的一個電子。值得注意是有小部分學生曾經反問爲甚麼鈉原子不能夠獲得七個電子，達到氬原子的電子排佈（2,8,8）。對於中三級的同學來說，本人相信「帶負電荷的電子與陰離子之間的排斥力不利形成 Na^{7-}」的概念十分困難，所以並沒有利用課堂時間向學生解答此問題。可想而知，學生根本無法解釋不利形成 Na^{7-} 的原因。

當教師強調離子的形成需要達到貴氣體的電子排佈時，本人有理由相信學生看見 Na^{7-} 的電子圖時，會聯想起氬的穩定性。因此，有 26 位學生（76%） 認爲 Na^{7-} 是較 Na 穩定。在這 26 位學生中，有 18 位學生（69%）表示肯定或十分肯定自己的答案正確。大部分學生的解釋是「Na^{7-} 是八隅體結構而 Na 不是」（參考附件三）。這可以証明學生直觀地把最外電子層含有八個電子的陰離子視爲穩定。

學生的學習態度：

根據題目二的答題結果，有 7 位學生（21%）認爲 Na 是較 Na^{7-} 穩定。當中有 2 位學生（參考附件三）對穩定性的概念有較清晰的理解，他們都表示 Na^{7-} 不會存在。雖然這兩位學生並沒有從能量的角度來解釋，但「Na^{7-} 不會存在」已暗示 Na^{7-} 較 Na 不穩定的意思。值得注意是這 2 位學生的學習態度十分良好，他們具有尋根究底的精神。例如：他們在課後時間向本人查詢「爲甚麼鈉原子不能夠獲得七個電子，達到氬原子的電子排佈（2,8,8）」的原因。因此，學習態度對建構正確的化學概念是十分重要的。

教學建議：

爲了解決學生對穩定性的迷思概念，本人認爲教師可以透過提問技巧來引導學生建構正確的概念。例如：教師教授學生繪畫陽離子的電子圖，可以要求學生嘗試估計原子變成陽離子的過程。同樣地，當教師教授學生繪畫陰離子的電子圖時，亦要求學生嘗試估計原子變成陰離子的過程。目的是讓學生找出金屬透過失去電子形成陽離子及非金屬透過獲得電子形成陰離子的關係。

其後，教師可以向學生派發前測（附件一）。其目的是測試學生會否把最外電子層含有八個電子的離子視爲穩定。

當學生完成前測後，教師可以問學生陽離子或陰離子能否獨立存在。

最後，教師可以播放有關鈉與氯進行反應的影片，其目的是引導學生思考陽離子與陰離子需要共同存在，從而帶出離子鍵的概念。當學生能夠描述離子鍵的形成過程後，教師可以讓他們進行後測（附件一）。後測的目的是考核學生能否掌握陽離子或陰離子不能獨立存在，從而讓他們對穩定性有更深入的了解。

對課時安排的建議：

「第 0 族元素與穩定性的關係」及「離子的形成過程」屬於「微觀世界 I」的學習內容。根據課程及評估指引，教授「微觀世界 I」的建議課時是 24 小時（課程發展議會與香港考試及評核局，2007）。由於其他課題的教學內容會涉及「微觀世界 I」的教學內容，所以教師需要確保學生對「微觀世界 I」的教學內容有基本的理解。舉例來說：學生需要懂得寫出離子化合物的化學式，才能進行有關摩爾質量的計算。

經過本人親身的教學經驗，24 小時未必可以讓教師在課堂深入探討學生的所有問題。例如：學生曾經問爲什麼鈉原子需要失去電子而非獲得電子來達到貴氣體的電子排佈。無可否認，學生的問題絕對是建構知識的重要過程。不過，基於有限的課時及學習差異的情況下，教師可以利用課後時間解答較高難度的抽象概念。否則，本人擔心利用過多時間來解釋課程以外的抽象概念，導致大部分學生的學習動機下降。

除此之外，本人認爲教師可以運用「翻轉教室」的教學模式，從而向能力較高的學生解答問題。其好處是課堂時間可以集中照顧能力較弱的學生，確保他們能夠建構基礎知識。

結論

是次研究証明大部分學生認爲 Na^+ 及 Na^{7-} 較 Na 穩定，原因是他們利用「八隅體」的概念作爲解釋，証明他們受「第 0 族元素與其穩定性」的概念而影響，實在是以偏概全。還有，尋根究底的精神絕對有助建構正確的概念。

教師可以讓學生進行前測及後測，從而令他們建構更清晰的穩定性概念。另外，基於課時有限的關係，教師可以嘗試運用「翻轉教室」的模式來解決學習差異的問題。

參考資料

課程發展議會與香港考試及評核局 (2007)：《化學 課程及評估指引 (中四至中六)》，香港，政府物流服務署

Özmen, H. (2004). Some Student Misconceptions in Chemistry: A Literature Review of Chemical Bonding. *Journal of Science Education and Technology*, *13*, 147-159.

Taber, K. (2002) *Chemical Misconceptions: Prevention, diagnosis and cure: Classroom resources, Volume 2*. London: Royal Society of Chemistry.

附件一

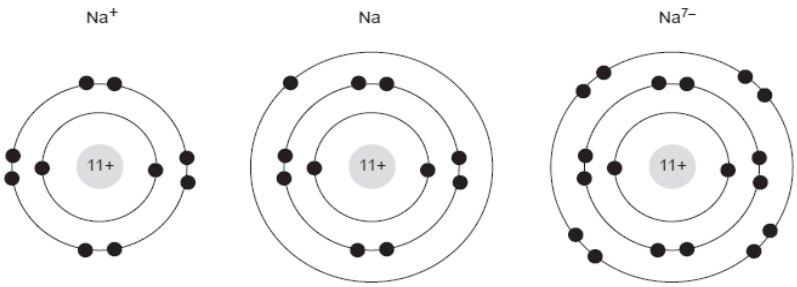
中三級 化學科

姓名:_____ 班別:_____ (　) 日期: _____

穩定性的概念

根據以下三幅電子圖，回答題目一及題目二。學生需要判斷以下哪一句子是正確，並圈出正確句子的英文字母。與此同時，請你在選答的題目，圈出你對自己答對題目的肯定程度，並且試解釋你的選擇。

題目一:



A. Na^+ 是較 Na 穩定。
B. Na^+ 和 Na 是同樣穩定。
C. Na 是較 Na^+ 穩定。

正確句子	對自己答對的肯定程度			
A / B / C	十分肯定	肯定	不肯定	十分不肯定

解釋: _____

_____

題目二:

A. Na 是較 Na^{7-} 穩定。
B. Na 和 Na^{7-} 是同樣穩定。
C. Na^{7-} 是較 Na 穩定。

正確句子	對自己答對的肯定程度			
A / B / C	十分肯定	肯定	不肯定	十分不肯定

解釋: _____

_____

附件二

學生	正確句子	對自己答對的肯定程度	學生的解釋
1	A	十分不肯定	八隅體結構
2	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構
3	A	肯定	因為 Na^+是八隅體結構
4	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構，Na 不是
5	A	十分肯定	Na^+是八隅體而 Na 不是八隅體
6	A	肯定	因為 Na^+是八隅體，八隅體較穩定。
7	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構，而 Na 不是。
8	A	不肯定	因為 Na^+是八隅體結構
9	A	十分肯定	因為 Na^+最外層有八顆電子是八隅體結構，較穩定。
10	A	十分肯定	八隅體結構
11	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體
12	A	肯定	因為原子失去了電子後，可造成的化學反應會較少，而且它是八隅體結構
13	A	肯定	因為 Na^+是八隅體，而 Na 不是一個八隅體
14	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體，相比 Na 較穩定
15	A	十分肯定	因為八隅體結構比較穩定。
16	A	十分肯定	因為八隅體結構是十分穩定
17	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構，而 Na 不是
18	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構，但 Na 不是八隅體結構，所以 Na^+較 Na 穩定。
19	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構
20	A	十分不肯定	八隅體結構
21	A	肯定	因為 Na^+是八隅體結構，而 Na 不是。
22	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體
23	A	肯是	因為 Na^+八偶體，而 Na 不是。
24	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結體
25	A	肯定	因為 Na^+是八隅體
26	A	不肯定	因為是八隅體結構
27	A	不肯定	因為是八隅體結構
28	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構。
29	A	不肯定	因為它是八隅體結構
30	A	十分肯定	因為 Na+最外圍電子有八粒，是八隅體結構
31	A	十分肯定	因為 Na^+是八隅體結構。
32	A	十分肯定	因為電子太多就不穩定，不是八隅體容易產生反應
33	A	肯定	Na^+是八隅體結構
34	A	不肯定	因為 Na^+會形成八隅體結構，所以較 Na 穩定。

附件三

學生	正確句子	對自己答對的肯定程度	解釋
1	C	十分不肯定	八隅體結構
2	C	肯定	因為 Na^{7-}有兩個八隅體結構
3	C	肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構
4	C	十分肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構，Na 不是
5	A	十分不肯定	unresponed
6	C	不肯定	Na^{+}也是八隅體
7	C	十分肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構，而 Na 不是。
8	C	肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構
9	C	十分肯定	因為 Na^{7-}最外層有八顆電子是八隅體結構，較 Na 穩定。
10	C	不肯定	較 Na, Na^{7-} 有八隅體結構，但金屬鈉沒有負離子
11	C	十分肯定	因為 Na^{7-}是八隅體
12	C	肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構
13	C	不肯定	因為 Na^{7-} 較多電子
14	C	不肯定	八隅體結構
15	C	肯定	因為八隅體結構較穩定。
16	A	Unresponed	因為 Na^{7-}理論上不存在。
17	C	肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構，而 Na 不是。
18	C	不肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構，而 Na 不是八隅體結構，所以 Na^{7-}較 Na 穩定。
19	A	肯定	因為沒有 Na^{7-}這個離子，在理論上。
20	A	肯定	沒有反應
21	C	肯定	因為 Na^{7-}都是八隅體結構。
22	C	肯定	因為 Na^{7-}是八隅體，Na 不是
23	C	肯定	因為 Na^{7-}是八隅體而 Na 不是。
24	C	肯定	因為八隅體結構
25	C	肯定	因為 Na^{7-}是八隅體
26	B	不肯定	因為 Na 和 Na^{7-}都是八隅體結構
27	C	不肯定	因為是八隅體結構
28	A	不肯定	因為電子越少會較穩定。
29	C	不肯定	八隅體結構
30	C	十分肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構，Na 不是。
31	C	十分肯定	因為 Na^{7-}是八隅體結構
32	A	十分肯定	電子較少比較穩定
33	C	肯定	Na^{+}是八隅體結構
34	A	十分不肯定	因為是八隅體，但負荷太多

小學生預備校際科學專題設計比賽 – 觀察與分析

周文禧、曾卓妍、黃文譽、朱啟豪、李天城、吳本韓
香港中文大學

引言

小學常識科強調探究式學習，課程指引並指出「專題研習」、「科學探究」及「服務學習」是頗適合常識科探究式學習的教學策略（課程發展議會，2001）。本文的首五位作者是修讀學位教師教育文憑的準老師，他們參考民族誌（Ethnography）的研究方法，觀察了一所小學的兩組學生，在參加一個校際科學專題研習比賽前的預備工作，本文會描述他們的觀察及分析。

專題研習

是次校際科學比賽的探究主題是「綠色啟航」*，兩組學生分別由兩位老師帶領，共同商討出探究的主題，然後每周於課後集會一次，進行相關的探究及預備比賽中的展品。以下簡略介紹這兩個專題研習的內容：

研習 A

是由八個小五、小六學生共同參與，他們在老師的指導下，利用一些簡單的物料，如卡紙、飛機木及珍珠板等製作一些小型模型飛機，並嘗試改變機翼形狀、重心位置、升降舵的角度等因素，從而探究這些因素對飛機的飛行距離、滯空時間等有何影響。

研習 B

是由五個小五、小六學生共同參與，主旨是設計和製作一個環保機場模型。整個研習大概可以分為兩個部分，第一部分是研究和設計隔音設施，這個設施的原意是為了減少飛機升降時所產生的噪音對機場客運大樓的影響，同時當中亦牽涉了環保樓宇、機場設計的概念，第二部分是製作模型。

(* http://www.hkedcity.net/ises/cht/whatsnew.html#)

研究方法

本文的研究是參考民族誌的研究方法，是一個完全質性的研究。民族誌源自人類學的研究，研究員於陌生的環境下，觀察研究對象的行為及各種環境特徵，然後分析及建構影響行為的可能原因。大多數教育研究都會先預設了一些明確的研究問題，不過有些民族誌研究在開始時只有一兩條一般性的問題，研究員在現場觀察時會逐漸修訂成為較明確的研究問題（高敬文，1999）。

本文的首五位作者，參加了學生每一次的聚會，並加入各學生小組，當中主要扮演觀察者的角色，即是學生在討論或探究時，他們盡量不給予意見，但當想深入了解學生的某些想法或動機時，才會作出提問。在每次集會後，會以日誌的形式記錄集會中的各項事情。在第二次集會後，他們制訂出以下兩條研究問題：

1. 參與者的互動對學生進行專題研習有何影響？
2. 學生在參與有關科學探究的專題研習時，會有何得著？

參與者的互動對學生進行專題研習的影響

參與者的互動包括老師與學生的互動及學生之間的互動。在小學的環境裏，學生長久以來有依賴老師提供答案的慣性，所以從觀察所得，大部份的互動行為都是由老師主導，而當中的老師提問及回饋是影響學生進行專題研習最重要的因素，其次是老師對學生的要求。

老師對學生的提問及回饋

對小學生而言，兩個研習的內容都是陌生的，我們發現老師適當的提問及回饋除了能指引學生研習的方向外，更能引起學生的興趣及學習動機，以下會用數個例子來闡釋我們的觀察。

- 老師利用了課堂所學及日常生活例子作為引子，問學生聲音透過甚麼傳播時，學生表現得很踴躍發言和提出了很多觀點，例如有學生提出了聲音在鐵裏會比在水中傳得較快，全組學生都積極表達意見，但可能因為學生的部分意見不著邊際，或是因為要趕專題進度，老師接著便停止了學生的發言，而開始提出真空的概念，並且加以講述。當老師開始主導時，學生便開始失去了興趣，部分學生更表現得不專心和不耐煩。

- 當老師提問開放式的問題時，學生有可能給出很多意想不到的答案，當然有些是錯的。若時間及資源允許，讓學生自行發現為甚麼某些答案不可行也是一個很好的學習經驗。例如老師希望令學生明白模型飛機需要先以二維平面圖繪畫圖樣，再利用剪刀沿著線邊剪出不同部分的零件組裝而成，但老師並沒有直接告知學生答案。相反，老師先問學生能否單靠參考立體圖便能製作出飛機。起初有同學回答可以，老師便請同學手繪出立體圖，然後請同學按繪畫的立體圖製作數隻相同的飛機模型，最後學生便發現方法不可行，只有繪畫二維平面圖才能做得到。

- 若學生未能即時想到答案，老師可以稍作停頓給予學生時間思考，或改以選擇題或是非題提問。例如老師向學生提問「如何能確保飛機的機翼穩固？」，學生未能回答確保飛機的機翼穩固的方法，老師便即場製作出兩種機翼：相連的機翼及可分拆的機翼，再提問「那一個可以比較穩固地固定在飛機上？」。老師給予學生討論的機會，而透過與其他同學的對話交流，學生便能夠正確地指出可分拆的機翼，繼而說出可分拆的機翼的好處包括使飛機對稱，使飛行時更穩定。

- 請學生先預測結果是一個簡單而有效的提問方法。例如在進飛行測試前，老師先請學生預測結果，當測試結果不理想，老師便會問學生可以如何改善。而同學回答後，老師亦

會即時作出恰當的回饋，形成良好的互動氣氛。例如同學發現飛機在空中打轉，老師先問同學可以如何改善，學生建議移動機翼位置。老師便分別把機翼移動至最後、中間偏前和最前位置投擲。同學觀察到當機翼在中間偏前和最後位置時，飛機便沒有打轉。老師隨即引入「重心」的概念，再提問可以放甚麼在機頭增加重量。有同學建議使用硬幣，亦有同學建議黏土和萬字夾。老師與學生討論各種方法的利弊，最後決定使用萬字夾。老師隨後再提問有關重心和機翼位置的關係，進入新一輪的討論和飛行測試。

- 若果學生在回答（或思考）老師提出的問題時需要協助，老師可適當提出一些他們課堂所學或日常的例子，引導他們嘗試運用自己的已有知識和日常觀察與問題和情況作比較，從另一方面解決問題。同時藉此亦能帶出課堂知識亦能夠在不同情況下運用，而不是空泛的文字和理論。例如問學生聲音透過甚麼傳播，在甚麼媒介傳播較快，音樂廳的牆壁利用甚麼物料建造等來引導學生思考隔音屏障可以利用甚麼物料建造。學生在回應這些提問時都很踴躍和感興趣，他們會積極回答問題，而且能提出自己的經歷和見解。我們從這推斷引用學生的已有知識和日常例子是可以一方面能夠引起學生的興趣，令他們更投入，另一方面亦能引導學生從更多角度思考。

老師對學生的要求（例如：要學生在課前做某些工作、定出期限等）

- 五、六年級的小學生雖有做專題研習的經驗，但在時間管理和分工這兩方面還是需要老師的協助。在觀察的過程中，兩位老師每一次都會在下課前為各同學分配工作，期限一般是一星期。超過一半的同學都可以完成工作，有些同學甚至會做額外的工作，但也有些同學沒有完成。由此推論，如果沒有老師從旁協助，很大機會進度會出現問題。

- 小學生一般沒有記錄數據的經驗和習慣。在某兩次的聚會中，每位學生獲分配負責一項變因的公平測試，雖然每位學生有機會分享檢測成果，但我們觀察到過程中並沒有學生進行任何文字或照片記錄。由於學生沒有記下其他同學的測試結果，只是單靠記憶記住，因此常常重複提問和測試，老師亦需要重複講解，浪費了不少時間。基於此項觀察，我們提議老師可以每次安排其中一位同學負責完整及詳細地紀錄過程和測試結果，並上載至互聯網，讓學生可以更了解每一位同學的工作和進度。

- 兩位老師都很有經驗，從他們對學生提出的要求，看出他們都一直在評估學生可能遇到的困難，例如在保存作品方面，老師要求學生以盒子盛載模型飛機，以免作品在運載過程中損毀。

學生之間的互動

學生之間的互動包括合作製作、交流溝通、肢體動作等等。從觀察所得，同學本身互相熟悉的程度是影響學生之間的投入和互動的重要因素，例如我們留意到研習 A 小組裏的兩位女生，在整個過程中都稍為被動，很少主動說出自己的見解（小組共有六男二女）。和兩位女生剛好相反，男生們則表現積極，常常提出不同的建議，亦會主動提問。更有兩位男學生曾在課外的時間相約進行額外的研究和飛行測試。後來從訪談中得知，兩位女生和其他同學不

太熟悉，即使在課前的時間亦較少和其他組員聊天，而兩位主動進行額外研究的學生本來已經是很要好的朋友。

學生在參與有關科學探究的專題研習時可能有的得著

是次研究只是一個小型的質性研究，並沒有用任何評估工具來測量學生在各方面的發展。研究員只是從旁觀察，然後分析學生的表現，推斷出學生在各共通能力、態度和價值觀都有所得著，以下會以一些觀察到的情境來闡釋我們的推斷。

解難的能力

- 整個研習過程可說是解難能力的訓練，因為學生在過程中少不免遇到不同的困難。雖然不是所有問題他們都可以自行解決，但在過程中學生對解決難題有著正面態度，樂於嘗試，例如研習 A 的學生從多次的測試中整合資料，並採取最可行的方法改良模型飛機。例如起初以膠水或白膠漿拼合珍珠板組件，學生發現組件容易鬆脫，有同學提出以膠紙代替，但後來發現即使使用膠紙仍然會有組件移位的可能性。及後有同學提出「榫卯」的方式代替，老師和所有同學便開始討論「榫卯」的可行性。在討論的過程中，同學有提到兩種方法的利弊，如使用膠紙雖然組件有可能移位，但可能在投擲前先把組件移到所需位置，而且使用膠紙比較方便快捷，製作容易；而使用「榫卯」的方式要先要準確的位置上畫上記號，「榫卯」的卯口厚度亦需要準確量度，製作比較費時，但如果製作準確，組件便不會移位。然而，在分析過利弊之後，老師和學生均認為應以飛機飛行穩定性為重，選擇依「榫卯」的方式製作飛機。之後老師提出以兩條木條取代珍珠板作為機身，同學們亦有先和老師討論使用珍珠板和木板的好處，才一致決定改用新的材料。由此例子可見，學生在過程中，十分了解目前所需解決的問題，而經過了解和分析不同的方案後，才採取最合適的方式去解決問題。

- 在進行研習 B 的過程中，學生們需要進行實驗，其目的在於找出隔音物料的厚度和隔音性能之間的關係。他們總共做了三次實驗，在這三次的實驗過程中，他們改良了實驗的設置。這個實驗最原始的設計只有一把人聲、一幅由不同數目的發泡膠板造成的牆和一個安裝在智能手機上的音量探測裝置。他們預計發泡膠牆越厚，隔音能力越佳。在第一次的實驗中，他們得到的實驗結果顯示兩者之間的關係並不明顯。因此有學生發現了聲音會因為與房間牆壁的反射而從不同角度射向音量探測器，所以他建議多用三塊發泡膠板包圍發泡膠牆兩側及上面，形成了一個半密封的盒子。這建議大大改善了實驗的設計，減低了聲音反射所做成的誤差。除此之外，他們也改用了防狼器作為聲源和改用音量計來取代智能電話。因為使用人聲並不可靠，每次發出的聲量並不一致，不能做到公平測試。我們觀察到在這個過程中，學生提升了他們的解難能力。學生會基於不合乎他們預期的實驗結果而思考實驗設計的上的不足。用心思考每一個細節並逐一改善。此外，他們也學會了讀取數據時的技巧，例如讀取儀錶上的起伏不定的數據時應取一個中位數，和利用圖表的方法記錄實驗數據。

溝通/協作能力

- 在研習 A 中，學生每人負責一項變因的公平測試，每次都需要向老師和其他同學匯報自己的研究進度。在起初進行匯報時，學生的匯報內容簡單，在老師不斷追問下才能完整描述飛機的飛行情況，而學生亦沒有主動對其他同學的匯報作出回饋，在老師追問下，才能總結出改善的方法。但幾次之後，學生已經可以清晰地表達飛機的飛行測試結果，同學亦有仔細聆聽。在老師的引導下，學生能作出適當的回應，甚至建議同學可以如何改善設計，討論氣氛變得良好。例如有一次，有同學匯報飛機忽然出現了會轉彎的問題，有同學指出有可能是因為不對稱，另一位同學指可能是由於模型飛機在運送過程中損毀，被重物壓過而變得不對稱，亦有其他同學建議同學用紙袋運送模型飛機。

- 在研習 B 的三次的實驗過程中，老師和學生的角色都有所轉變。在首兩次實驗的過程中，老師的角色都是一位領導者，把不同的工作分配學生，帶領學生進行實驗。經過這兩次實驗後，學生似乎學會了實驗模式和公平測試的重要性。因此第三次的實驗都是由學生親自進行，他們自行分配好工作才開始做實驗。老師並沒參與和給予意見，只在旁邊拍攝影片作為記錄。由此可見，學生的學習過程，往往由老師的指導開始。整個實驗的模式對於小五小六的學生來說並不容易，所以起初老師要有足夠的指導才會使學生明白整個實驗的流程及設計。但指導的過程不能由老師完成所有工作，學生必定要在當中有所參與，才會使他們保持學習的興趣。當然，偶爾他們會有不同的意見，例如曾有多於一位同學應徵同一崗位，但是他們都會聆聽別人的意見和禮讓。總括而言，我們觀察到這個實驗是一個提升他們的協作能力以及溝通能力的學習過程。

自學能力和運用資訊科技能力

學生在設計和解難過程中需要不同方面的知識，因而需要進行不同的資料搜集。在過程中他們能培養到自學能力。同時他們亦懂得利用資訊科技，例如互聯網進行資料搜集和儀器協助量度數據。他們能夠自學和運用資訊科技完成工作。

數學能力

科學和數學有著密切的關係，在進行科學的專題研習中，老師可適當地添加一些數學元素，例如研習 B 的老師，帶領學生計算隔音板與機場大樓的距離時，引導學生運用了相似三角形的比例特性，讓同學明白解決日常生活的問題往往需要數學的知識。數學並不是單純的算式，而是一種實用的知識，藉此也可以提升學生對數學的興趣和能力。

態度和價值觀的培育

- 研習 A 的同學第一次剪出紙樣以製作模型飛機時，不少同學表現心急，沒有按著紙樣剪出組件，以致組件大小不一。老師見狀便提醒學生測試的準確性比快速地完成測試更為重要，以及科學測試中公平測試的原則。在整個準備過程中，老師亦曾經就學生不聽

指示而作出訓示。老師強調學生正在進行嚴謹的科學測試，並非鬧著玩，希望學生能認真對待每一個「任務」。

- 另外在過程中，老師亦向同學傳遞了一個信息：重複嘗試，不怕錯誤。在每位成員匯報負責的變因測試過程中，老師對學生點出「重複嘗試」的道理，測試並不是一次作準，而是需要多次重複嘗試；在製作的過程中，老師點出模型飛機需要重複製作，使用不同技巧製作，從中作出改動用作測試。老師在過程中一直與同學耐心地討論每次測試結果，就算一次的測試未做到預期效果，亦指導同學作其他方向的嘗試。

- 態度及價值必須經過一段過程才可建立。科學測試的過程少不免重重複複的測試和改良，當中依賴老師的鼓勵及帶領、組員之間的互動，讓同學從中領略到科學家、工程師製作發明時必須有謹慎和堅毅的態度，明白錯誤不是問題，只要不放棄，仍能透過細心觀察和修正問題達至更好的效果。

- 此外，過程中亦讓他們意識到責任感和團隊的承擔精神。因為每人都負責一項變因，曾經有學生忘記攜帶自己測試的模型飛機，老師提醒他們是一個團隊，各人的進度會互相影響，請同學做好自己的本份，而那次之後再沒有出現過忘記攜帶模型的情況。另外，我們觀察到當同學有疑問，除了向老師求助外，亦有向其他同學提出疑問，而其他同學亦樂於嘗試為同伴解決難題。

結語

是次研究觀察了兩組小學生在參加校際科學專題設計比賽前所進行的各項活動，並試圖從觀察結果來回答兩條研究問題。從觀察所得，參與者的互動肯定會影響學生在各方面的表現，例如決定探究的方向、探究的方法是否恰當、主動性及組員之間的合作等。而在眾多互動行為當中，老師的提問及回饋是影響學生進行專題研習最重要的因素，其次是老師對學生的要求。此外，從觀察結果推斷，學生在各共通能力、態度和價值觀都有得著。

不過我們必須強調，本文的各個論點只是研究員從觀察作出的推論，並沒有參考其他文獻或實證研究來支持論點，例如在討論學生之間的互動時，我們從與學生談話中得知，兩位女學生與其餘六位男學生並不太熟悉，我們由此判斷這可能是她們參與活動時較為被動的原因，但我們沒有深入探究其他可能性，例如很多研究文獻提及有關科學學習裏的性別議題（gender issues）。雖然本文的部份論點可能較為片面，但希望當中的觀察及討論仍能作為老師有用的參考。

鳴謝

本研究感謝嶺南大學香港同學會小學麥子彬副校長及莊志剛老師，提供協助及許多寶貴建議，我們在此特別鳴謝。

參考

高敬文（1999）。質化研究方法論。台北：師大書苑。

課程發展議會（2011）。小學常識科課程指引（小一至小六）。